

MINISTERIO DE INDUSTRIA Y ENERGIA
COMISARIA DE LA ENERGIA Y RECURSOS MINERALES

**ESTUDIO DE NUEVAS TECNICAS DE
EVALUACION Y EXPLORACION MINERA, A.
INCLUIR EN LA ASESORIA DE FUTURAS
ACTUACIONES DEL I.G.M.E**

1
INSTITUTO GEOLOGICO Y MINERO DE ESPAÑA

00741

MINISTERIO DE INDUSTRIA Y ENERGIA
INSTITUTO GEOLOGICO Y MINERO DE ESPAÑA

ESTUDIO DE NUEVAS TECNICAS DE EVALUACION
Y EXPLORACION MINERA, A INCLUIR EN LA --
ASESORIA DE FUTURAS ACTUACIONES DEL IGME

Diciembre, 1981



INDICE DEL ESTUDIO
=====

	<u>Página</u>
1.- INTRODUCCION	1
2.- METODOLOGIA	4
3.- METODOS DE PROSPECCION	8
3.1. Fotogeología y control remoto	9
3.1.1. Side-Looking Airborne Radar (SLAR)	9
3.1.2. Fotografías e imagen de satélites	12
3.1.3. Otros sistemas de detección por control remoto	16
3.1.4. Métodos de muestreo del aire	20
3.1.5. Fotogeología y control remoto. Ultimos avances	21
3.2. Prospección geoquímica	23
3.2.1. Electrodo de iones específicos	23
3.2.2. Exploración Litoquímica	28
3.2.3. Prospección geoquímica. Ultimos avances	35
3.2.4. Análisis geoquímicos	38
3.3. Prospección geofísica	40
3.3.1. Métodos electromagnéticos	40
3.3.2. Resistividad	54
3.3.3. Radiometría	58
3.3.4. Métodos electromagnéticos. Ultimos avan ces	61

	<u>Página</u>
4.- EVALUACION	66
4.1. Objetivo de la evaluación minera	67
4.1.1. Supuestos fundamentales de la evaluación económica	69
4.2. Cálculo del valor actual: Método de Hoskold ...	71
4.3. Metodología en países socialistas	86
4.3.1. Exposición de la metodología utilizada .	86
4.3.2. Resultados de esta metodología	102
4.4. El riesgo en la inversión minera	105
4.4.1. El riesgo de una inversión	105
4.4.2. Análisis de la sensibilidad de las deci- siones de inversión	124
4.4.3. La adopción de decisiones de inversión - en base al valor medio y a la varianza - del valor capital y de la tasa de retor- no	144
4.4.4. Comportamiento aleatorio de los flujos - de caja de una inversión. Algunas leyes de probabilidad que resultan útiles en - la práctica	163
4.5. El coste de oportunidad	179
5.- CONCLUSIONES	201

1.- INTRODUCCION

Los trabajos de exploración se hacen, en general en tres etapas sucesivas.

En la primera se trata de determinar el esquema de la estructura geológica, la cantidad posible de mineral y su calidad media.

En una segunda fase se estudia la estructura geológica, las reservas de mineral en la tierra y la cualidad del mineral por -- clases y regiones.

En este punto cabe resaltar la cada vez mayor dificultad de encontrar yacimientos de alta ley por lo que los esfuerzos de las compañías se centran en el perfeccionamiento de sus instrumentos de búsqueda. Estas investigaciones en el avance de la tecnología suelen ser llevados con la mayor discreción posible aunque pasado algún tiempo son dados a conocer en simposiums, comunicaciones a revistas, congresos, etc.

Una tercera fase, y ya en periodo de explotación, consistirá -- en determinar la estructura geológica de las secciones, necesaria para la conducción correcta de los trabajos.

En resumen, podemos decir, que el fin que se pretende con los trabajos de exploración son la obtención de datos sobre la estructura geológica del yacimiento, forma de los cuerpos mineralizados, sus tamaños, composiciones y cualidad.

Otro aspecto importante y determinado por las dos primeras etapas es la economicidad del yacimiento. La evaluación de sus características para estar en condiciones de tomar la decisión de su explotación o abandono.

El objetivo de este proyecto es describir las innovaciones de las técnicas ya existentes, así como la exposición de las recientemente aparecidas que permitan optimizar los resultados.

2.- METODOLOGIA

La elaboración del presente proyecto ha pasado por las fases -- que a continuación se detallan.

En una primera fase se procedió a la homogeneización de criterios y métodos, así como la definición de las características de la información a emplear. También se elaboró un esbozo de la estructura o índice del estudio.

En una segunda fase, se procedió a la conclusión definitiva de la estructura del estudio, en todos sus apartados, adecuándolos a los objetivos perseguidos. En esta fase, también se planteó la problemática de la información, a la que debía exigírsele como características imprescindibles la actualidad y grado de fiabilidad requeridos.

La tercera fase dedicó a una exhaustiva búsqueda de los datos necesarios, teniendo siempre presente las características que se le pedía a la información.

Los datos mencionados se localizan en diversas fuentes. Por otra parte se consultaron tanto organismos públicos como privados

dos, entre los que se incluye el propio Instituto Geológico y -
Minero de España, compañías mineras nacionales y extranjeras. -
La información recabada de estos organismos fue por lo general -
amplia y fiable.

Otras fuentes de información fue el Fondo Documental en propie-
dad de la empresa consultora cuya información se encontraba al
día gracias a las numerosas suscripciones a publicaciones, sien-
do en general de última hora.

En un paso posterior, se procedió a la recopilación y clasifica-
ción de toda la información obtenida. Este trabajo se realizó -
con un grado máximo de objetividad, en función de la actualidad
y fiabilidad de la información que se había obtenido, teniendo,
presente la fuente de la que procedía.

En una cuarta fase se procedió a la elaboración propiamente di-
cha del estudio, realizando en primer término las series y cua-
dros estadísticos, así como el análisis de los mismos.

El proyecto consta de los siguientes apartados:

- Generalidades en el que de manera somera se da un repaso a la

.../...

actualidad en minería.

- Metodología seguida en el presente proyecto a fin de exponer - los criterios con que se ha realizado la elaboración hasta llegar a la conclusión del proyecto.
- Descripción exhaustiva de las técnicas utilizadas en la exploración minera haciendo especial incapié en los avances tecnológicos incorporados a los satélites artificiales.
- Análisis de los métodos de valoración, en la que se analizan - los diferentes métodos utilizados por la economía minera para la valoración de yacimientos, resaltando las tendencias actuales de valoración.
- Análisis del riesgo de las inversiones mineras debido a sus peculiaridades.
- Detallado estudio de los costes de oportunidad.
- Conclusiones y recomendaciones derivadas del desarrollo del -- proyecto.
- Bibliografía consultada.

3.- METODOS DE PROSPECCION

3.1. Fotogeología y control remoto.-

Los mayores avances realizados en la exploración geológico-minera son los apuntados por los satélites artificiales que incorporan en su instrucción los más recientes avances técnicos.

Se expondrá una visión general de estas utilizaciones para pa--sar seguidamente a un apéndice donde serán descritos las últi--mas realizaciones en el campo de la exploración geológica.

3.1.1. Side-Looking Airborne Radar (SLAR).

El invento de este antiguo y poderoso sistema fue originalmente desarrollado para propositos militares, pero también ha sido empleado para uso civil de un tiempo a esta parte. Un radar fan--like está orientado desde un lateral del avión, para reflejar -señales que producen una imagen cuya densidad está en relación con las variaciones del terreno. La imagen es producida en una serie de registros en la pantalla del radar, para ello se usan una serie de instrumentos los cuales facilitan estas imágenes - para ser registradas fotoquímicamente en papel fotográfico. El resultado neto es más bien una fotografía pura y no una fotografía aérea convencional.

El conjunto de imágenes que abarca SLAR varía desde 2 a 50 km. y, aún cuando el registro de la imagen es oblicuo, la instrumentación la convierte en una imagen esencialmente planimétrica. La imagen es registrada a la izquierda o derecha de la línea de vuelo por lo que existe una distancia mínima en el conjunto de imágenes inmediatas por debajo del avión.

Aunque las imágenes parezcan fotografías aéreas, existen algunas diferencias importantes. Las variaciones en la vegetación, producen ligeras diferencias en las respuestas del radar, una imagen del SLAR muestra esencialmente el terreno como podría ser mostrado en una fotografía convencional sacada de la vegetación. Las variaciones producidas por el relieve se recogen por el lado en que se sitúa el SLAR del avión y no son radiales alrededor del centro como es el caso de una fotografía aérea.

Por ello todas las sombras desaparecen y aparecen normales en la línea de vuelo. Estas sombras son áreas completamente negras sin ninguna información en las imágenes del SLAR. Sin embargo la mayoría de las áreas con sombras, en fotografías aéreas, son parcialmente iluminadas con luz difusa. Los cambios, tenues en el color y la textura, que son visibles en las foto-

.../...

grafías aéreas, no son apreciables en las imágenes del SLAR.

El SLAR produce excelentes imágenes que pueden ser tomadas a -- cualquier hora del día o de la noche sin que les afecte la nubosidad. En un tiempo relativamente corto un solo avión puede - proveer unas buenas imágenes cubriendo amplias áreas que requerirían miles de fotografías aéreas convencionales. Además las - imágenes captadas por el SLAR pueden ser usadas para interpreta- ciones geológicas, la información que se puede obtener es bas-- tante más limitada que la que se obtiene en la fotografía aérea convencional. Por dicha razón el uso más importante del SLAR es la obtención de mapas base de muy buena calidad de imagen hechos en las áreas donde el mayor problema es la persistencia de nie- bla y/o nubes.

Como la instrumentación del SLAR es extremadamente compleja, el equipamiento es muy costoso y su utilización no es tan amplia - como debiera. Sin embargo, su valor o importancia ha sido redu- cida por la imagen de los satélites los cuales han provisto un catálogo virtualmente completo de fotografías limpias de nubes de casi todas las partes del mundo. No obstante, las imágenes - del SLAR han probado ser, y continúan siendo estrictamente - útiles para la revisión de mapas base de muy buena calidad de -

.../...

algunas áreas del mundo tales como América Central y Papúa Nueva Guinea.

3.1.2. Fotografías e imagen de satélites.

Desde que aparecieron las primeras fotografías de la tierra tomadas por los satélites enviados al espacio por encima de la atmósfera, se ha comprendido que, además de los valores militares, la fotografía espacial puede ofrecer una nueva y apasionante en sensores remotos con aplicaciones en cartografía, agricultura, metodología, zonas forestales y geología. Esto fue acentuado con la fotografía en color aportada por los Estados Unidos con el programa espacial, Géminis de 1960.

Con la asistencia de avances de la tecnología en electrónicas y comunicaciones en los Estados Unidos, ha sido posible el transmitir a la tierra, por los satélites espaciales en orbita, una continuada, notable y clara transmisión de registro electrónico de imágenes. El primer uso civil de este logro técnico fue uno de los satélites metereológicos de la serie "Nimbus" lanzado al espacio en 1966. En julio de 1972 la NASA lanzó al espacio un satélite conocido como "Satélite de Tecnología de Recursos de la Tierra" (ERTS-1). Este fue seguido por el ERTS-2 en 1973. En 1975 -

.../...

la NASA cambió los nombres de los satélites a LANDSAT-1 y LANDSAT-2. Los satélites fueron diseñados para obtener una completa extensión "fotográfica" del globo terrestre. Estos satélites giran en círculo alrededor de la tierra describiendo una órbita polar en sincronización con el sol a una altura de más de 900 km de altitud cubriendo así el mismo terreno en un ciclo de 18 días. Las imágenes son registradas por un registrador multi-espectral (MSS) en cuatro bandas espectrales, verde visible (5000-6000 Å), rojo visible (6000-11.000 Å) y dos bandas infra-rojas, visibles (7000-8000 Å y 8000-11.000 Å). Las imágenes son reproducidas en papel fotográfico y son proporcionadas las cuatro bandas espectrales más dos composiciones de color supuesto. La banda 6 (7000-8000 Å) es probablemente la mejor para propósitos geológicos. Cada imagen estándar cubre un área de 35.500 km² a una escala aproximada de 1/1.000.000. Las fotografías de las -- que se dispone en la mayor parte del mundo por debajo de los 80° de latitud, pueden ser obtenidos del Centro de Datos Eros, --- Sioux Falls, Dakota del Sur, USA. También se puede disponer de las escalas estándares 1/1.000.000 de fotografías, dispositivos (en positivo y negativo), y ampliaciones a las escalas de --- 1/500.000 y 1/250.000.

También se pueden obtener imágenes de color supuesto. Estas --

.../...

imágenes muestran a menudo rasgos difíciles de apreciar en las imágenes de blanco y negro ordinarios. Viljoen y Al (1975) muestran algunos ejemplos extraordinarios de la imagen color supuesto de LANDSAT. Las imágenes de LANDSAT-1, las cuales poseen un elevado ángulo de sol, son preferentemente para fines geológicos, pero las imágenes LANDSAT-2 con un ángulo de sol bajo pueden ser útiles para la ayuda de la interpretación, en las áreas de complejos de construcción.

Las imágenes del LANDSAT pueden ser descifradas por las técnicas fotográficas estándar, no obstante las imágenes no aparecen en fotografías estereoscópicas. Los efectos sendostereoscópicos se pueden obtener enfocando dos bandas espectrales diferentes (banda recubierta estereo) de la misma imagen o encaminando las imágenes de la misma vista sacadas a diferentes tiempos, (tiempo recubierto estereo). Como añadidura, existe una cierta cantidad de recubrimiento lateral la cual mejora con la latitud. Esto da una verdadera imagen sobre la estrecha cinta de la fotografía, pero solo los mayores rasgos topográficos producen efectos apreciables. Aunque la resolución del objeto es del orden de 90-100 m. esto puede mejorar ligeramente si existe un fuerte contraste. Estas imágenes de los satélites son ideales para perfilar los rasgos geológicos y regionales y con la misma prueba los rasgos que

.../...

se aprecian al terreno son a menudo más claros en las fotografías aéreas por las imágenes de los satélites, que abarcan una vista más amplia, perfilan los rasgos geológicos que no se describen en las fotografías aéreas. [La figura nº 3.19. muestra una imagen del LANDSAT de una parte del norte de Zambia y es notable la claridad con la que muestra la geología regional (figura nº 3.20.)]

Se han realizado importantes trabajos LANDSAT y la vía de aprovechamiento más importante fue el uso de diferentes bandas espectrales para mejorar los rasgos de interés. Con la ayuda de las técnicas de computadora se pueden mejorar pequeños contrastes en reflejos espectrales y compararlos. En la exploración de minerales esta técnica ha sido usada para probar y perfilar áreas de alteración hidrotermal asociadas con depósitos de cobre (Schmidt, 1976), pero los éxitos obtenidos fueron muy limitados.

La imaginería de los satélites parecer ser que no va a jugar un papel importante directo en el descubrimiento de depósitos, de minerales dado que éstos son focos de superficie muy pequeños en relación a las áreas de registro. Sin embargo como ayuda para la delineación de mapas geológicos y en la definición

favorable de las áreas de mineralización las imágenes de los sa
télites son de una gran valoración. Los desarrollos en este cam
po son tan rápidos que se espera en un futuro próximo poder dis
poner de datos más útiles cuando sean lanzados al espacio la -
nueva serie de estos aparatos.

3.1.3. Otros sistemas de detección por control remoto.

En los últimos diez años se ha venido dedicando una considera--
ble atención a la detección de vapor en la atmósfera desde avio
nes y naves espaciales por medio de espectros de absorción en -
la radiación solar es reflejada. El aprovechamiento, probable--
mente más importante es la medición de la contaminación de NO_2
y CO_2 en el aire en la vecindad de las áreas industriales.

El método puede tener valor en detección de SO_2 y otros gases -
pueden que estén asociadas con ciertos depósitos de sulfuro. El
vapor más útil desde el punto de vista de la exploración es pro
blemente el mercurio como se sabe, el vapor de mercurio es -
emitido por nuevos depósitos de minerales. Las longitudes de on
da de absorción de mercurio son absorbidas por la capa de ozo-
no que se extiende en la atmósfera superior, lo que disminuye -
considerablemente el paso de la radiación solar, a través de -

.../...

estas longitudes de onda, hasta la capa terrestre.

Esto puede ser un grave problema largo el punto de vista de la exploración, pero ya lo es por otras razones tales como la radiación en la parte ultravioleta del espectro que es altamente peligroso para la mayoría de los seres vivientes.

Un gas común con una absorción espectral en la región visible-entre 5000 y 6000 Å es vapor de yodo. La investigación Barringer en Canadá ha inventado una instrumentación para detectar el vapor de yodo en la atmósfera (Barringer, 1966) y se han --realizado análisis para ver si este invento puede tener alguna aplicación en la exploración. Se sabe que los cloruros están -asociados con algunas formas de depósitos de minerales y otros tipos de halógenos.

La instrumentación básica desarrollada es conocida como "correlación espectrométrica". La radiación solar es pasada a través del espectrometro desde un telescopio enfocado hacia la tierra y se hace vibrar a través de una rejilla de difracción por una lamina refractaria oscilante. Las longitudes de ondas deseadas seleccionadas por la rejilla de difracción, se pasan a una máscara de correlación óptica a las rejillas de salida habituales -

.../...

del espectrómetro.

Esta máscara es una réplica del espectro de yodo. Si el vapor de yodo se encuentra en el haz de luz, entonces la absorción espectral y la máscara óptica son correlativas. Como este espectral vibra a través de la máscara se produce una sacudida que puede ser detectada en un tubo fotomultiplicador. El principio de la correlación espectrométrica puede ser aplicado a otros muchos gases incluido el NO_2 y el SO_2 . El descubrimiento remoto de yodo muestra concentraciones con cenizas de algas marinas a lo largo de las líneas costeras de las cuales ya se ha comentado el control de la contaminación a través de la medición del SO_2 y del NO_2 .

Los desarrollos más recientes incluyen la extensión de las técnicas de correlación espectral dentro de la región de infrarrojos del espectro y del desarrollo por el "Estudio Geológico" de los Estados Unidos de una técnica para la medición de luminiscencia solar estimulada de materiales en la capa terrestre. — Otra técnica interesante, desarrollada en principio por R.J.P. Lyon (1965) mide las emisiones de infrarrojos de las rocas de los terrenos.

.../...

IMAGENES TERMICAS.- Esta es una técnica que en principio fue desarrollada con propósitos militares para permitir a los observadores "ver" en la oscuridad usando lentes de rayos infrarrojos con un alcance de 8-13 m. Un espejo de rotación ensamblado registra sistemáticamente el terreno reflejando sus rayos infrarrojos sensor infrarrojo. La salida que envía el sensor es amplificada e imprimida como una imagen de densidad variable muy similar en apariencia a una fotografía aérea ordinaria. Un avión equipado con un proyector de imagen térmicas puede hacer un reconocimiento cubriendo una zona del mismo modo que lo haría para un reconocimiento fotográfico convencional.

Los aspectos geológicos que no se aprecian en las fotografías ordinarias a menudo se muestran muy claras en la obtención de imágenes térmicas. La capacidad térmica del terreno es fuertemente afectada por el contenido en humedad y otros aspectos tales como las zonas de fallas.

También puede captarse cualquier área con corrientes de calor anormal lo que puede ser útil en la exploración de focos de potencial de energía geotérmica. Existe a menudo un incremento de corrientes de calor debido a los depósitos de mineral y algunos autores han sugerido que la obtención de imágenes térmi-

cas podría ser útil para la delimitación de áreas de potencial mineralizado. Sin embargo, las corrientes de calor son generalmente muy pequeñas para poder ser detectadas desde la superficie, por lo que sólo se puede calcular (medir) bajo el nivel subterráneo.

Un nuevo desarrollo en imágenes térmicas es el lanzamiento de un satélite por la NASA en 1979 conocido como Heat Capacity Mapping Mission (HCMN). Este satélite proveerá imágenes térmicas de la tierra de igual manera que la obtención de imágenes convencional que provee el LANDSAT. Sin duda, estas imágenes serán un complemento a las imágenes enviadas por el LANDSAT para ayuda de la exploración de minerales.

3.1.4. Métodos de muestreo del aire.

Las partículas diminutas procedentes de las rocas y terrenos son elevadas a la atmósfera por corrientes de aire. Los componentes orgánicos metálicos son dispersados por los humos y la vegetación y están representados en la atmósfera en pequeñas agrupaciones. En las proximidades de depósitos minerales y por encima de éstos existe una mayor concentración en la atmósfera de partículas con contenidos de metal procedente del depósito. En 1971 Weiss ha descrito y patentado una técnica para -

.../...

recoger estas partículas mediante un avión y subsecuentemente analizarlas por su contenido en elementos traza. El colector de muestras consiste en un molde de aluminio de 30 cm² con un hilo de nylon de 0,1mm que dá 450 vueltas al mismo. Este molde vá detrás del avión a una distancia de 60-90 m. del suelo. Después de un corto tiempo se recoge este colector y se pone en una bolsa de plástico. Se sacan los hilos de nylon en el laboratorio y se recogen las cenizas que son analizadas espectrográficamente.

Se han hecho experimentos con varios vuelos en diferentes áreas con resultados positivos.

3.1.5. Fotogeología y control remoto. Ultimos avances.

Es en estos momentos cuando se está llegando a sacar un máximo partido a los satélites dedicados a la exploración minera. Ultimamente se han producido todo tipo de avances tal y como muestra Volchequrskiy et al. (Internat. Geol. Rew. 21 1233—1240) con fotografías de las zonas geológicas de los mares Azul y Caspio en busca de bolsas de petróleo siendo estas fotografías las bases del estudio.

Otro estudio que toma como base las fotografías de satélite es el de Heidecker et al. (Proc. Austr. IMM 270; 39-96) en donde se hace hincapié en las fallas y estructuras geológicas, detectadas por el satélite, susceptibles de tener carbón.

Los avances más recientes hacia la fecha son la utilización de técnicas digitales para el análisis de la información principalmente en la búsqueda de uranio. Engineering and Mining Journal Febrero 1979-78-82 Patoneaux (Pract. Intl. Engng. Geol. 12 181-187) ofrece un ejemplo de la utilidad de las imágenes infrarrojas multiespectrales tomadas por un satélite. En el mismo aspecto el estudio de Stancioff y Hill (Amer. Assn. Petrol. Geol. Bull. 63; 951-966), así como el excelente artículo de Warwick et al. (Quart. Intl. Engng. Geol. 12; 159-179) acerca de las aplicaciones de las técnicas de "scanning" con infrarrojos.

3.2. Prospección geoquímica.-

3.2.1. Electrodo de iones específicos.

Una variante de electrodo de vidrio usado para determinar la actividad del ión H^+ pH es el electrodo de ión específico o ión-selectivo que ha sido desarrollado para medir la actividad de un número de iones además del H^+ . Los electrodos de ión específicos se encuentran disponibles actualmente para detectar el Cl^- , Br^- , I^- , S^{--} , CN^- , Ag^+ , F^- , Cu^+ , Ca^{++} , N_3^- , K^+ , Pb^{++} y Na^+ , pero en geoquímica estos han encontrado el mayor uso para detectar fluorita. Las mediciones se hacen a una escala -expansión pH- Eh con el electrodo en la solución de la muestra. Puede existir un número de iones de interferencias para los que serán necesarios unas correcciones. En el caso de la fluorita, OH^- sólo existe una pequeña interferencia iónica.

La determinación de la fluorita en la muestra geoquímica, tal como la describió Franklin (1970) es la siguiente:

1. 250 mg de muestra con 1 g. de 2:1, Na_2CO_3/KNO_3 se funde a una temperatura de $500^{\circ}C$.

.../...

2. Cuando se enfría, la mezcla es disuelta en 20 ml. de agua
3. Después de 1 hora la solución y el residuo son transferidos a una probeta de 100 ml, añadiendo 10 ml. de 1 M. de ácido cítrico y 100 ml. de agua quedando como resultado final pH de 5,5-6,5
4. La actividad del ión F^- se lee con el electrodo de ión específico, el cual ha sido calibrado preparado de manera similar a las muestras.

Los electrodos de iones específicos cubre un recorrido de 0,01 1900 ppm en la solución ó 4-760.000 ppm en la muestra original con la disolución anterior.

OTROS METODOS

Un buen número de otros métodos diferentes han sido usados en geoquímica, pero la mayoría de ellos se encuentran en fases experimental y aún no han sido desarrollados para aplicaciones comerciales. Una excepción notable ha sido la técnica de fluorimetría que es muy usada para la determinación del uranio del agua, tierras y rocas. La muestra se oxidiza por evaporación -

con ácido nítrico mezclándola a continuación con fluoruro de so
dio. El enfriamiento y solidificación de la espuma de fluoruro -
pasa a ser examinada en un fluorímetro especialmente diseñado -
que mide la cantidad de fluorescencia emitida cuando la espuma
es irradiada por luz ultravioleta. La sensibilidad es del orden
de 5 ppb U para una muestra sólida.

Una nueva técnica de un método antiguo que tiene un gran poten-
cial y que se viene utilizando a pequeña escala es la "espectro
metría de emisión de plasma". En vez de usar un arco eléctrico -
para excitar las líneas de emisión ópticas se usa un plasma aco
plado de inductividad. La generación del plasma procede del gas
de argón con una llama de plasma especial que consiste en una -
mezcla en un tubo de cuarzo utilizando un generador RF que ope-
ra a 27,12 MHz con una potencia de 4 kw. Las temperaturas de —
5.000 °K más se obtiene a través del plasma cuyo tubo tiene for
ma de "rosca". La solución de la muestra es aspirada a la antor
cha de la misma forma que en un equipo convencional AAS. Cuando
la muestra pasa a través del centro de la "rosca" del plasma, -
los átomos de los diferentes elementos de ésta son fuertemente-
excitados y emiten sus líneas de características especiales. Es
tas pueden ser separadas por un monocromator convencional y un
detector de los que se usan con el equipo de AAS determinando -

la concentración de un elemento en particular. Utilizando de esta forma, sólo se pueden analizar los elementos 1 por 1 por cada vez que se prepara el monocromator , pero el método tiene algunas ventajas más que el AAS. La sensibilidad es muy buena y se puede cubrir un gran espacio de concentración y la necesidad de hacer disoluciones. Scott y Kokot (1975) y Scott et al. (1974) dan una amplia descripción de ésta técnica. Los instrumentos de lectura directa para la determinación de varios elementos al mismo tiempo también fueron desarrollados, pero su coste es demasiado elevado para los laboratorios normales geoquímicos.

Otra técnica que ha sido desarrollada en el trabajo geoquímico por organizaciones de investigación y gubernamentales es la "activación del neutrón" pero es muy costosa para ampliar sus aplicaciones comerciales. Esta técnica está basada en el fenómeno de que al ser los átomos bombardeados por los neutrones se transforman en isótopos radioactivos y que pueden ser detectados por sus tiempos de descomposición o espectros de rayos-gamma. Las muestras para los ensayos son colocadas en un reactor nuclear, el cual puede contener un flujo de neutrones de hasta 10^{14} de neutrones/cm²/segundo por un periodo de varios minutos midiéndose luego su radioactividad, a menudo por un periodo de varias horas. Se pueden producir standards sujetos al mismo pro

.../...

cedimientos. Como muy poca gente tiene acceso a los reactores nucleares, las aplicaciones de éste método son muy limitadas. Un buen número de fuentes de neutrones tales como berilio/antimonio-124 ó californio-252 están capacitados para activar una serie de elementos muy interesantes incluso a través de los flujos de neutrones producidos por ellos mismos que son de 10^9 - 10^{10} veces menores que el flujo del reactor nuclear. Los instrumentos de este campo utilizado para dichos métodos han sido diseñados y construidos e incluso el sistema Metalog^(R) de Scintrex Ltd en Canadá, pero las piezas que componen el equipo son muy complejas y costosas por lo que no se utiliza en el trabajo de exploración rutinaria.

Plant y Coleman (1973) describen la activación de neutrones como aplicación a las muestras de oro utilizando un reactor nuclear, y Philbin y Senftle (1971) describieron un campo de técnicas para uranio usando la fuente Cf-252.

Otra interesante técnica que ha sido usada en un caso muy especial es el llamado "berilómetro" que ha sido diseñado específicamente para detectar berilio (Bowie et al.1960).

.../...

3.2.2. Exploración Litoquímica.

Los antecedentes de la relación entre los procesos regionales - geoquímicos y tectónicos es un tema de origen reciente. De este modo Allen (Int. Geochem. Expl. 10; 203-218) describió los modelos de relación entre las anomalías regionales y geoquímicas y tectónica de placas para el noroeste Canadiense. Los antecedentes geoquímicos basados en las muestras de sedimentos de un lago revelan tres rasgos en la escala global: (a) la anomalía más importante de los elementos refractarios y calcófilos asociados con un cinturón Proterozoico volcánico-plutónico de arco de afinidad propuesto previamente, (b) un dramático incremento de bario asociado con una zona de sutura Precambriana, y (c) una segunda anomalía importante de elementos refractarios y calcófilos asociados con un cinturón de piedra nefrítica arqueana que se extiende a lo largo de la supuesta zona de sutura.

Burwash (Canadá Int. Earth Sci. 16; 472-483) debatió la presencia de uranio y de torio en la profundidad de las rocas del oeste de Canadá en términos de controles petrológicos y tectónicos de la región, y Picot (mineral deposits 14; 153-159) examinó la distribución del bismuto en los depósitos continentales de Francia en relación con la distribución mineralógica a la metalogé-

.../...

nia (Texto francés).

Kudrjavnsev y Zubov (Intern. Geol. Rev. 21; 314-320) describió la morfología, composición y distribución en geoquímica primaria de los alrededores de mineralización de oro-antimonio, mientras que Dunlop et al. (Int. Geochem. Explor. 11; 285-297) debatía los estudios de superficie litoquímica que habían hecho sobre la distancia del centro volcánogénico de una ocurrencia masiva de azufre en Limerick, Nuevo Sur de Gales. Aquí el realce de estrechas zonas de magnesio y potasio ocurre cerca de la mineralización. También fue encontrado sodio de alta calidad en contraste con la disminución de sodio registrada en dichas áreas. Durante la lixiviación se desgasta el calcio y sodio, y en menor grado el potasio, mientras que los contenidos de hierro, plomo y cinc se van enriqueciendo a medida que se va adentrando en la roca.

Las características de distribución de los patrones de la geoquímica primaria en Zlata Baňa, distrito del este de Slovakia fueron descritos por Rybar (Mineralia Slovaca 11; 55-70) (Czech Test), y Stumpfl (Mineral. Deposita 14; 207-217) teniendo en cuenta las presencias de manganeso alrededor de los depósitos de estratos metamórficos.

.../...

El problema de la elaboración de mapas regionales geoquímicos - en áreas de superficie de lagos y cuencas de ríos fue debatido en un artículo por Doyle y Fletcher (Canad. Inl. Earth Sci. 16; 1086-1093) quien encontró que los contenidos del suelo en cobre, hierro, manganeso y cinc en el Sur-Central de Saskatchewan pueden ser de utilidad para este propósito.

Suoep y Zeegers (Inl. Geochm. Expl. 11; 103-130) ilustraron la utilización del terreno multi-elemento geoquímico como herramienta en la identificación y exploración de depósitos de cobre con dos ejemplos en Perú, encontrando que existía un sistema de zonificación concéntrica en estas áreas con cobre, molibdeno, - oro y postasio en el centro y plomo, cin, mangenso y fluorita - que forman una zona exterior. Estos patrones confirmaron la — existencia de un: sistema zonificado hidrotermal.

Fleming y Neale (Inl. Geochem. Expl. 11; 33-51) describieron - una exploración geoquímica en la prospección de cobre de Yandera, Papua en Nueva Guinea.

Estos autores encontraron oro, y en menor extensión molibdeno , que son indicadores excelentes de este tipo de mineralización - teniendo en cuenta que ambos elementos tienen un alto grado de

estabilidad en dichos campos y zonas oxidizadas. Beus (Inl. Geochem. Expl. 11; 195-208) debatió la utilización del sodio como indicador de mineralización de esmeraldas en la Cordillera — Oriental de la región de Columbia.

Barakso (CIM Bull. 72; Abril 1979; 135-142) proporcionó un informe excelente de la dispersión geoquímica de uranio en las regiones con exceso en contenido de este material y Robinson y Carpenter (Inl. Geochem. Expl. 11; 157-173) han considerado los métodos importantes de clasificación de las anomalías no significativas en los terrenos de Gladesville en el Condado de Jasper, Georgia, U.S. encontrando que era de particular importancia el ratio de cobre/níquel.

La prospección geoquímica para barita y celestita usando un radio-isótopo portátil analizador fluorescente fue desarrollada por Balletal. (Inl. Geochem. Expl. 11; 277-284). Este analizador de mineral portátil provee datos muy satisfactorios para bario, probando que es un buen indicador para depósitos de bario.

Que Be sea una fuente de neutrón depende del factor de si es -- bombardeado por las partículas positivas de los rayos-gamma o -- de un movimiento-rápido. Usando una fuente de gran cantidad de

de radioactividad como puede ser el antimonio-124 se pueden detectar los neutrones de la muestra dados por Be a través de un contador de boro trifluoruro. Se pueden hacer mediciones "in situ" en el terreno y detectar valores incluso inferiores a 10ppm. Este instrumento tiene un peso de unos 40 kilos y ha de ser -- transportado y operado por dos personas. Se ha empleado con bastante éxito en las prospecciones de berilio y en la evaluación de estos minerales en varias partes del mundo.

Existe una amplia elección de métodos analíticos que pueden utilizarse en la exploración geoquímica. El método a seleccionar no depende solamente del elemento a analizar sino también de la cantidad de concentración esperada. Los costes también son un factor importante. Por lo que solo los grandes laboratorios comerciales y las organizaciones de investigación pueden permitirse el lujo de utilizar equipo de Rayos X, fluorescentes o de -- emisiones espectrográficas.

Los métodos de las emisiones espectroscópicas y fluorescencia de Rayos X indicaron el total del Ni existente pero no la absorción clorométrica o atómica que dependiendo del Ni puesto en di solución para el análisis, puede registrar muy poco de la gran cantidad de silicato que contiene el Ni. Los ácidos más comun--

mente usados estan concentrados en $\text{HClO}_4\text{-HNO}_3$, HClO_4 , HCl-HNO_3 y HCl que dan un alto grado de extracción de metales procedentes de terrenos y de los sedimentos de rios.

Otro importante aspecto de los análisis geoquímicos es la precisión. Como ya se ha mencionado, una alta exactitud y precisión no tiene más importancia en exploración pero sin embargo es muy importante el control de la precisión dentro de los límites permisibles.

El verdadero contenido de una muestra en exploración geoquímica no tiene mayor importancia pero si es importante que el método usado sea consistente. El procedimiento normal en un laboratorio geoquímico es el calibrado del método utilizado en una serie de standards artificiales de contenido conocido de metal. Por otra parte la precisión se determina analizando las muestras standards del material (tierras, sedimentos de rio, cenizas de plantas de producción, etc.) o a través de la duplicación de varias muestras. En ningún caso es conocido el contenido actual de la muestra por ejemplo la habilidad para reproducir el resultado puede ser calculada partiendo de un valor de medida y de divergencia standard. Por ejemplo si 10 determinaciones de una muestra del standard durante un día de gran acti

vidad en el laboratorio producen los siguientes resultados para Cu de 250, 260, 275, 235, 245, 265, 260, 235, 280 y 265 ppm. el valor de media es 275 ppm. La precisión es normalmente expresada en términos de porcentajes al nivel del 95%. Por ejemplo dos divergencias standard a ambos lados de la media. La precisión - para el ejemplo mencionado es:

$$\pm \frac{2.15,5}{257} = \pm 12\% , \text{ al } 95\% \text{ de seguridad.}$$

Esta es la precisión de una concentración de unas 250 ppm. de Cu y se pueden encontrar variaciones en la precisión usando — muestras standard con diferentes contenidos en Cu. Si las muestras se trabajan en duplicado en vez de usar muestras standard, la precisión total es dada directamente por:

$$\sqrt{\frac{\sum d^2}{2n}} \quad (\text{Tompson y Howarth, 1973})$$

donde d es la diferencia entre duplicados y n es el número de parejas. Como un ejemplo si asumimos que seis análisis duplicados dan los siguientes resultados:

.../...

145	155
260	280
85	105
250	260
165	175
205	225

Usando la expresión anterior, la precisión es $\pm 11\%$ a un 95% del nivel de confianza.

3.2.3. Prospección geoquímica. Ultimos avances.

A lo largo del año apareció la edición de un nuevo volumen del septimo simposium internacional de prospección geoquímica celebrado en Golden, Colorado en Abril de 1978. El volumen, que fue editado por Watterson y Theobald, contiene una visión panorámica de lo ya utilizado y proporcionan una excelente revisión de los avances en el tema que han tenido lugar desde la publicación del volumen del anterior simposium.

Una interesante introducción hecha por Walker (BRM Int. Australian. Geol. and Geophys. 3; 311-317) discutía la implicación de las organizaciones gubernamentales en los reconocimientos geo-

.../...

químicos en Australia.

En vista del incremento del coste de exploración especialmente a nivel regional, la contribución hecha por agencias gubernamentales a la investigación de depósitos minerales está llegando a ser de suma importancia y sería bien visto que la totalidad del tema sea considerada tanto por geólogos del estado como de la industria privada.

De similar importancia fue el tema tratado por Bradshaw (Inl. Geochem. Expl. 12; 1-7) en el discurso presidencial a la Asociación de Exploración Geoquímica. En este, se puso atención en el hecho de que el costo de exploración para depósitos metalíferos se está elevando bastante más deprisa que los precios unitarios de los metales encontrados.

Posteriormente, se cree que ha sido un fracaso desarrollar y aplicar la tecnología de los años 70, y especialmente el avance significativo en nuestro entendimiento básico de los procesos que controlan la dispersión del metal. Hay, por tanto, una necesidad urgente por corregir este desequilibrio.

Que este grado de entendimiento ha continuado para desarrollar

.../...

durante 1977 queda patente pero la literatura publicada durante el año. Algo de esta ha sido relativamente en un plano general. Así un excelente artículo por Hambledon-Jones (Mins. Sci. and Engng. 10; 182-137) revisó la teoría y práctica de la prospección geoquímica para depósitos de uranio, mientras Qidwa y Jensen (Mineralium Deposita 14; 137-151) discutía la metodología de exploración para depósitos uraníferos de tipo arenoso.

Este último artículo amplió la interacción de la geoquímica del uranio en el medioambiente supergeno y las características de los medioambientes supergenos, fluviales y deltaicos.

Mc Laurin (Inl. Geochem. Expl. 10; 295-306) describió la disposición geoquímica de la masa mineralizada de Gamsberg al noroeste de la provincia de Cape en Sudáfrica, y Ribeiro et al. (Inl. Geochem. Expl. 12; 9-19) consideró la exploración geoquímica sobre un complejo máfico ultramáfico en Americana do Brasil Goras, Brasil, dentro del cual aparece con mineralizaciones sulfurosas de níquel-cobre.

Una contribución fascinante hecha por Plumer y Elliot (Inl. Geochem. Expl. 12; 24-34) discutía el uso del rubidio/estroncio ra ci o como un indicador de mineralización. Desde que el rubidio -

.../...

asocia con el potasio, y el estroncio con el calcio, el radio -
tiende a amplificar el incremento de potasio o la disminución -
de calcio en zonas de alteración hidrotermal. Los autores ilus-
tran este concepto con datos de Broken Hill en Nueva Gales del
Sur que demuestran el valor de la aproximación. Ukpong y Olade,
(Traus. Inst. Min. & Metall. B-App. Earth Sci 88; B81-B92) des-
cribieron sus conclusiones para reconocimientos geoquímicos de
mineralizaciones de plomo-cinc en el área Southern Benue Trough
de Nigeria. En contraste a los resultados obtenidos en muchas -
áreas, los análisis de extracción-fría fracasaron para determi-
nar un buen contraste entre muestras de terreno natural y áreas
anormales, la digestión en 4N HNO₃ por un lado mostró más inten-
sidad, pero por otro también más restricción de anomalías.

Un estudio de la optimización de la densidad de muestreo en re-
conocimientos de geoquímica de suelos fue descrito por Chork y
Gowett (Traus. IMM B-Es 88; B65-B68).

3.2.4. Análisis geoquímicos.

Han aparecido a lo largo del año dos técnicas relativamente nue-
vas para el muestreo y análisis geoquímicos.

La más importante, no obstante es la de "Inductively coupled plasma" (ICP). Básicamente es un nuevo método de excitación para su uso en espectrometría óptica. Estas mejoras prometen aumentar la sensibilidad, reproducibilidad y velocidad de análisis. Aún así el método es susceptible de nuevas mejoras para llegar a un pleno desarrollo de esta y poder obtener los máximos beneficios de su potencial.

Sin embargo Pahalavanpour et al. (Int. Geochem. Expl. 12; 45 - 55) ha presentado una contribución en la determinación de estaño en esta técnica.

La otra técnica aún en desarrollo de la cromatografía iónica. Tal y como describen en su artículo (Int. Geochem. Expl. 10; 245-258) Since et al. acerca del análisis de fluoruros, cloruros, nitratos y sulfatos en el agua, utilizando en analizador Dionex con una pequeña interferencia de los elementos y una gran sensibilidad 2 ppb (1 billón = 1.000 millones) de fluoruros y 10 ppm de sulfuros. En lo referente al método colorimétrico para la determinación de arsenico las nuevas mejoras introducidas por Marshall (Int. Geochem. Expl. 10; 307-313).

3.3. Prospección geofísica.-

3.3.1. Métodos electromagnéticos.

Los métodos básicos de electromagnetismo fueron muy experimentados y desarrollados en Norte América y Escandinavia a lo largo de las décadas de los 20 y 30 y actualmente se está llevando a cabo una modernización de éstos. La parte teórica de esta técnica es lo suficientemente complicada como para que esté al alcance de técnicos en una alta cualificación siendo generalmente muy poco comprendida y conocida por la mayoría de los geólogos.

No obstante los principios básicos del método no son difíciles de entender y los procedimientos para algunos de los métodos son relativamente simples.

Los métodos de exploración electromagnéticos. (EM) están basados sobre el principio de que las ondas electromagnéticas inducen corrientes en los conductores. Estas corrientes inducidas producen a su vez nuevas ondas E.M. que pueden ser detectadas con los medios adecuados. Como ejemplo pueden citarse aparatos tan familiares tales como un detector de metales y los detectores de minas utilizados en tiempos de guerra.

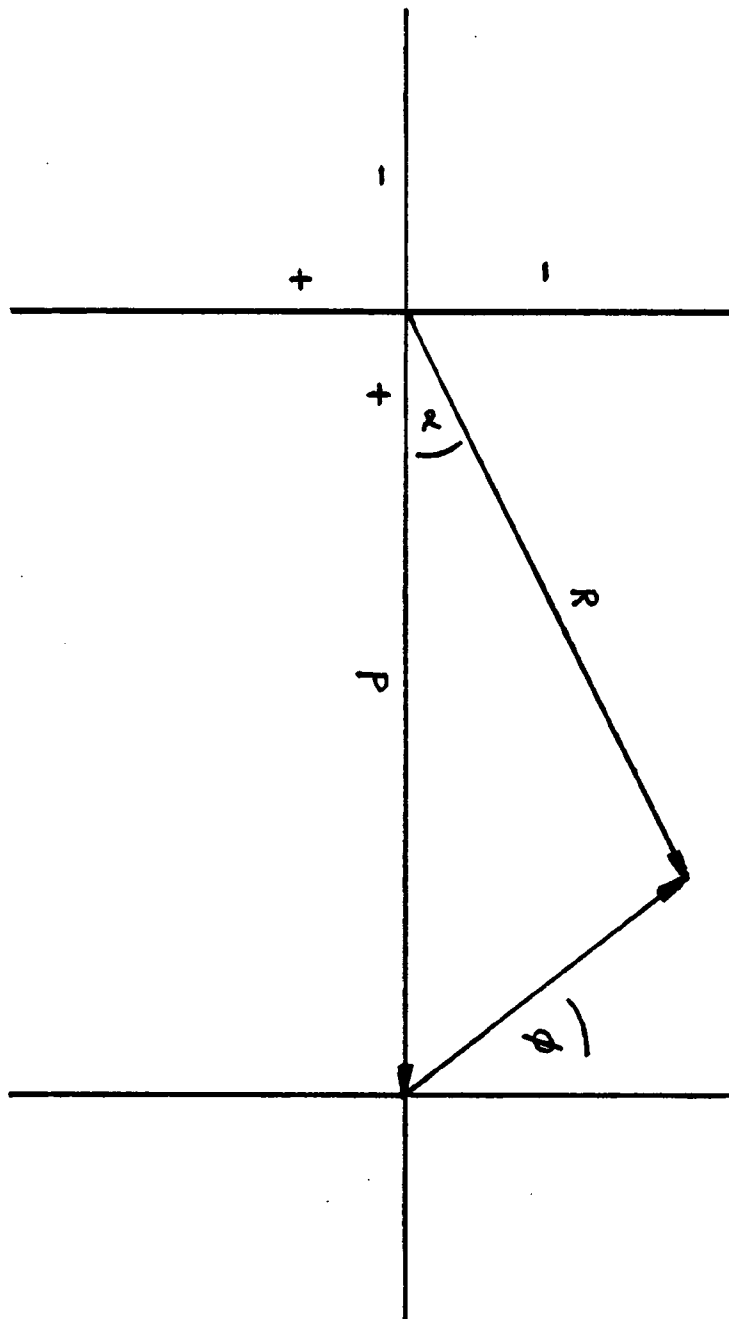
.../...

Un campo magnético primario con una frecuencia $\omega/2\pi$ actuando sobre un circuito eléctrico induce un campo electromagnético que proporciona mayor auge a un campo magnético secundario con un desfase de $(\pi/2)+\phi$ con respecto al primer campo siendo $\phi = \tan^{-1} (\omega L/Z)$ donde L es la inductancia y Z la resistencia del conductor. En un buen conductor Z tiende a 0 (cero) ϕ tiende a $\pi/2$ (90° fuera de fase). De aquí el grado de desplazamiento puede ser usado como una medida de un conductor incógnita.

Los campos primarios (P), secundarios (S) y resultante (R) pueden representarse en un diagrama de vectores ver figura 1 donde se pueden ver los componentes de un campo secundario en fase con P, sabiendo que es real o ésta en componente de fase, es igual a S en ϕ y la componente del segundo campo con un desfase de 90° tras P, sabiendo que la composición imaginaria es normalmente expresada en porcentaje con respecto al campo primario y a la razón, real/imaginaria, es usada como medida de la conductancia de un conductor problema.

Una razón superior a uno es indicativa de un buen conductor - una razón menor de uno significa que estamos en presencia de un mal conductor.

FIG. 1



El campo resultante del primario y secundario puede ser hallado en los componentes verticales (x) y horizontales (y) que forman los ejes de una elipse descrita por el vector resultante $2\pi \omega \sqrt{x^2 + y^2}$ veces por segundo y se dice que el campo está elípticamente polarizado.

La aptitud de esta elipse está en función del tamaño, profundidad y naturaleza de los conductores y los primeros métodos — electromagnéticos estaban basados en encontrar el plano de polarización de la elipse que determinan su azimut y en la localización de los ejes mayor y menor.

Los métodos electromagnéticos se pueden dividir en dos tipos básicos:

- a) Fuente de ondas fijas. Tales como el método de plano angular y Turam.
- b) Fuente de ondas móvil. Tales como el cañón de ondas electromagnéticas; Salingnam, Maximin.

PLANO ANGULAR

Este es probablemente el método más simple y por lo tanto el -

.../...

más popular aunque tenga un cierto número de desventajas.

Un "transmisor en bobina" es conectado a un oscilador (a una -- frecuencia que suele ser de 1.000 Hz) que se utiliza en posi— ción vertical, aunque también puede hacerse en posición horizontal.

En el plazo vertical se transmite un primer campo magnético. Un receptor es conectado a un amplificador y mediante unos auricu— lares se cambia la posición del transmisor hasta que la señal - audible es mínima. Esto ocurre cuando la bobina receptora esta en el mismo plano que la elipse de polarización y no se induce co— rriente. La figura nº 2 muestra como, de dos formas diferentes puede emitirse la señal. El angulo de inclinación puede medirse fácilmente con un clinómetro en la bobina receptora.

Se acepta convencionalmente que la inclinación hacia la derecha es positiva y la inclinación a la izquierda es negativa.

La bobina transmisora se situa encima de un punto en el área a estudiar y se realizan una serie de lecturas con la bobina re— ceptora a lo largo de líneas transversales que cruzan la zona - donde se supone hay anomalías de los posibles conductores.

FIG. 2. Dos posibles modos de utilización de las bobinas de recepción y transmisión.

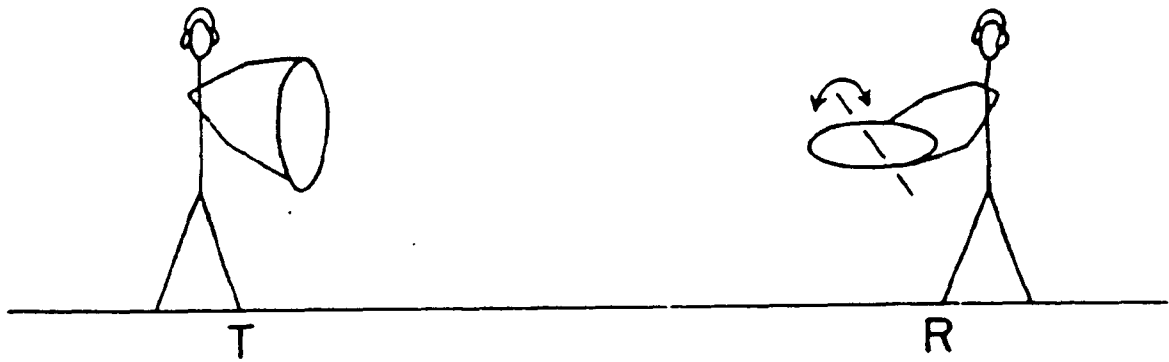
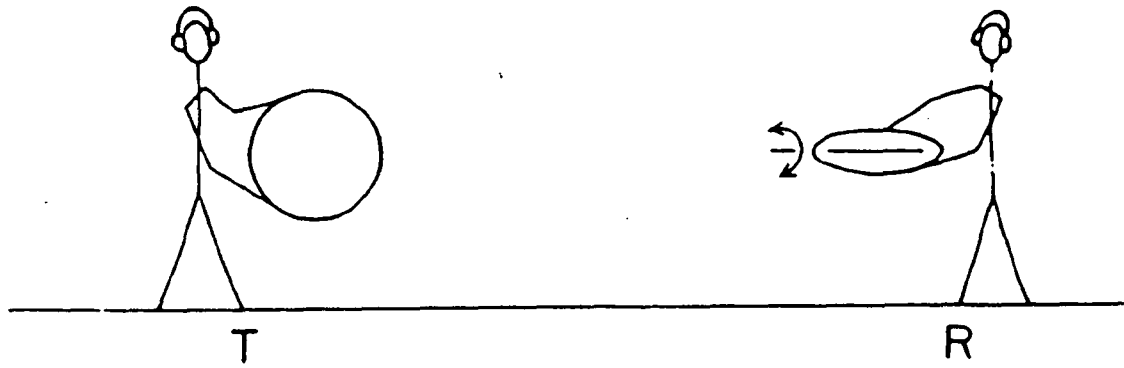
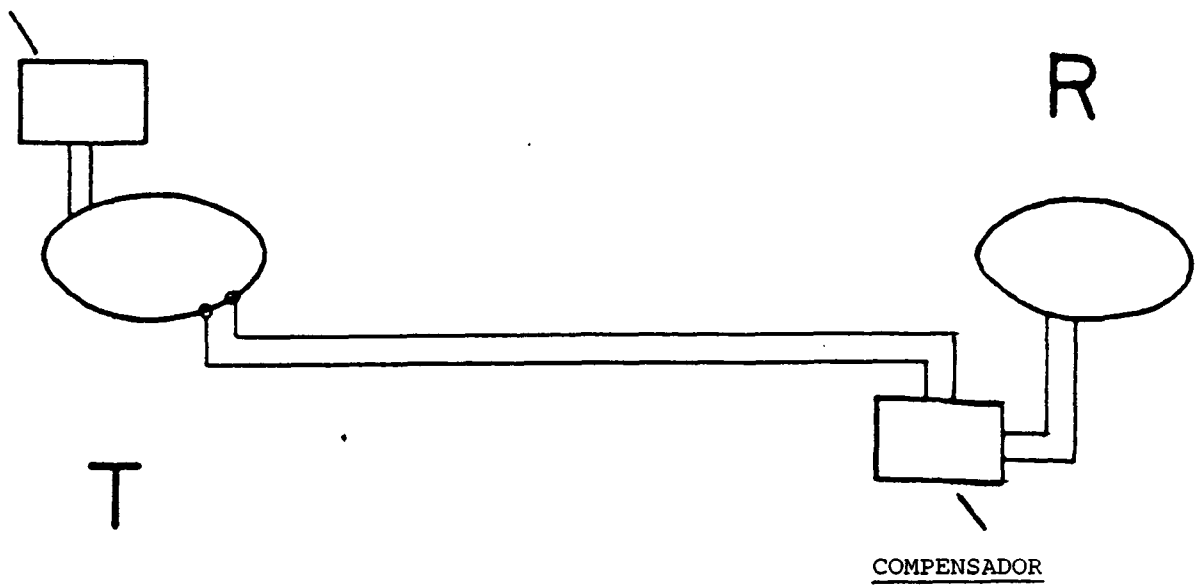


FIG. 7. Esquema

OSCILADOR



Una práctica muy habitual es la de orientar el plano del transmisor para que pasa por el punto de observación en cada lectura.

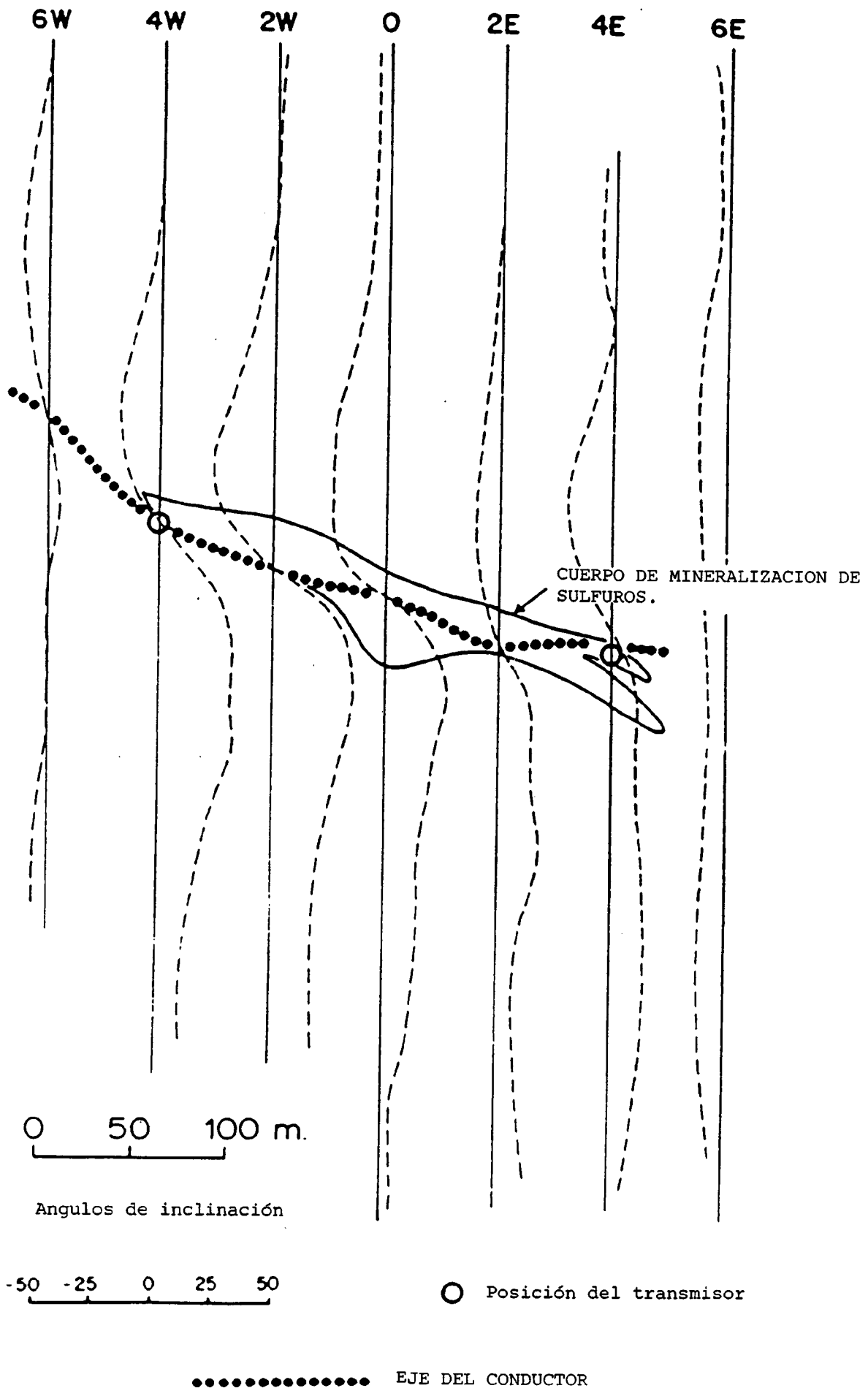
Cuando la distancia entre el transmisor y el receptor es del orden de 600 mts. el transmisor es cambiado de lugar siendo desconectados ambos para no tomar lecturas erróneas.

Una variación de este método es aquel en el que dos operarios - llevan consigo una parte del sistema, uno el transmisor y el -- otro el receptor. Actuando alternativamente como receptor y — tranamisor y moviendose a lo largo de una línea, que los mantiene siempre equidistantes, corriendo a todo lo largo el área de estudio.

En ausencia de conductores el campo permanece horizontal y el - angulo de inclinación es cero. Si se pasa por un lugar en el - que hay conductores puede medirse la variación del angulo positivo/negativo. (figura nº 3)

Las desventajas de este método indican en su poco poder de resolución y en la dificultad de encontrar las posiciones idóneas - para el transmisor debido a los campos de fuera-de-fase. Actualmente se está tratando de mejorar estos métodos para aumentar - su poder de resolución.

FIG. 3



TURAM

Este método fue empleado por primera vez en Suecia por H. Heds-trön, su nombre proviene del sueco "tuaram" o dos cuadros. Tal y como su nombre indica dos bobinas de búsqueda son trasladadas por a lo largo de líneas equidistantes en 10-15 mts.

Los cocientes entre las amplitudes, la diferencia de fase y los voltajes inducidos se miden en un puente compensador.

La posición de uso de las bobinas normalmente utilizadas es hori-zontalmente aunque pueden utilizarse en posición vertical y una vertical y la otra horizontal.

La fuente del campo primario es normalmente un cable perpendicu-lar a las líneas y enterrado en ambos finales, pero un gran bu-cle normalmente rectangular y sobre el terreno también puede uti-lizarse.

Para la medición de las amplitudes entre las dos bobinas hay que tener en cuenta la variación del campo primario con la distan-cia. En el caso del cable largo la razón del campo primario -

.../...

es simplemente la inversa de la razón de las distancias de las bobinas y el cable. Cuando se utiliza el bucle es necesario realizar medidas aparte para hallar las razones de TURAM requeridas.

En el caso de una fuente tomada por un cable largo si, V_1 y V_2 han inducido los voltajes Ψ_1 , y Ψ_2 en los campos verticales en posiciones 1 y 2. Las unidades de TURAM medidas son $V_1 r_1$, $V_2 r_2$ y $\Psi_2 - \Psi_1$ donde r_1 y r_2 son las distancias respectivas desde las bobinas al cable.

Cuando las bobinas se encuentran a un nivel diferente respecto a la fuente es necesario aplicar unos factores de correlación.

En ausencia de conductores la razón de la amplitud es igual a uno y la diferencia de tasa es cero. Cuando las bobinas se encuentran cerca de un conductor las razones de TURAM tienden a un máximo y las diferencias de fase a un mínimo.

Las distancias a medir desde la fuente a las bobinas viene determinada por el voltaje en las bobinas de búsqueda y en distancias relativamente largas es dificultoso realizarlas.

Un equipo TURAM standard está compuesto por (1) Motor Generador (2) "cable fuente" primario (3) dos bobinas receptoras y (4) un medidor de fases y razones.

El método de TURAM es ideal para la detección de yacimientos poco profundas y con buzamiento. La figura 4 muestra un perfil TURAM típico sobre un yacimiento de sulfuros.

EMISOR DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS

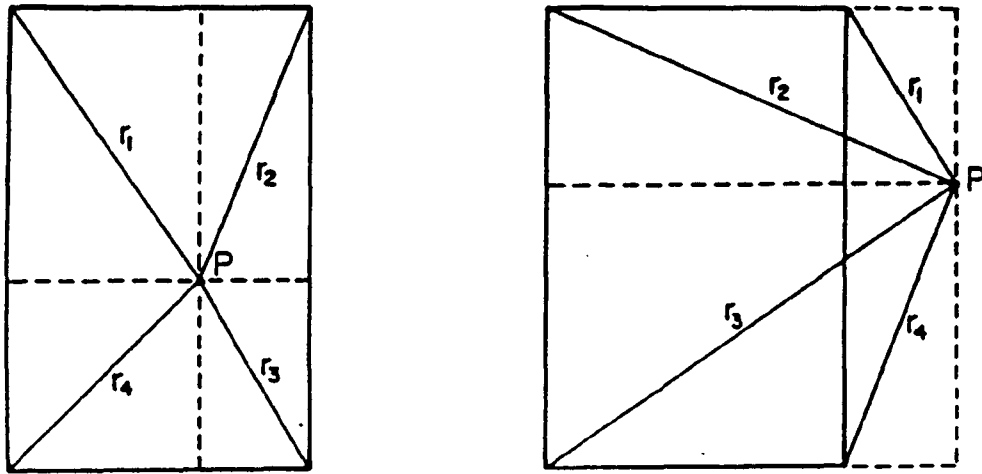
Esto es un método donde las bobinas, tanto transmisoras como receptoras se trasladan para cada nueva lectura.

Es probablemente el más popular debido a la simplicidad y flexibilidad de la operación.

Si el conductor es más débil con respuesta a la separación de las bobinas entonces ambos valores, real e imaginarios, pueden ser positivos.

La naturaleza del conductor es indicado, por la razón real/imaginaria, una gran corriente indica un buen conductor.

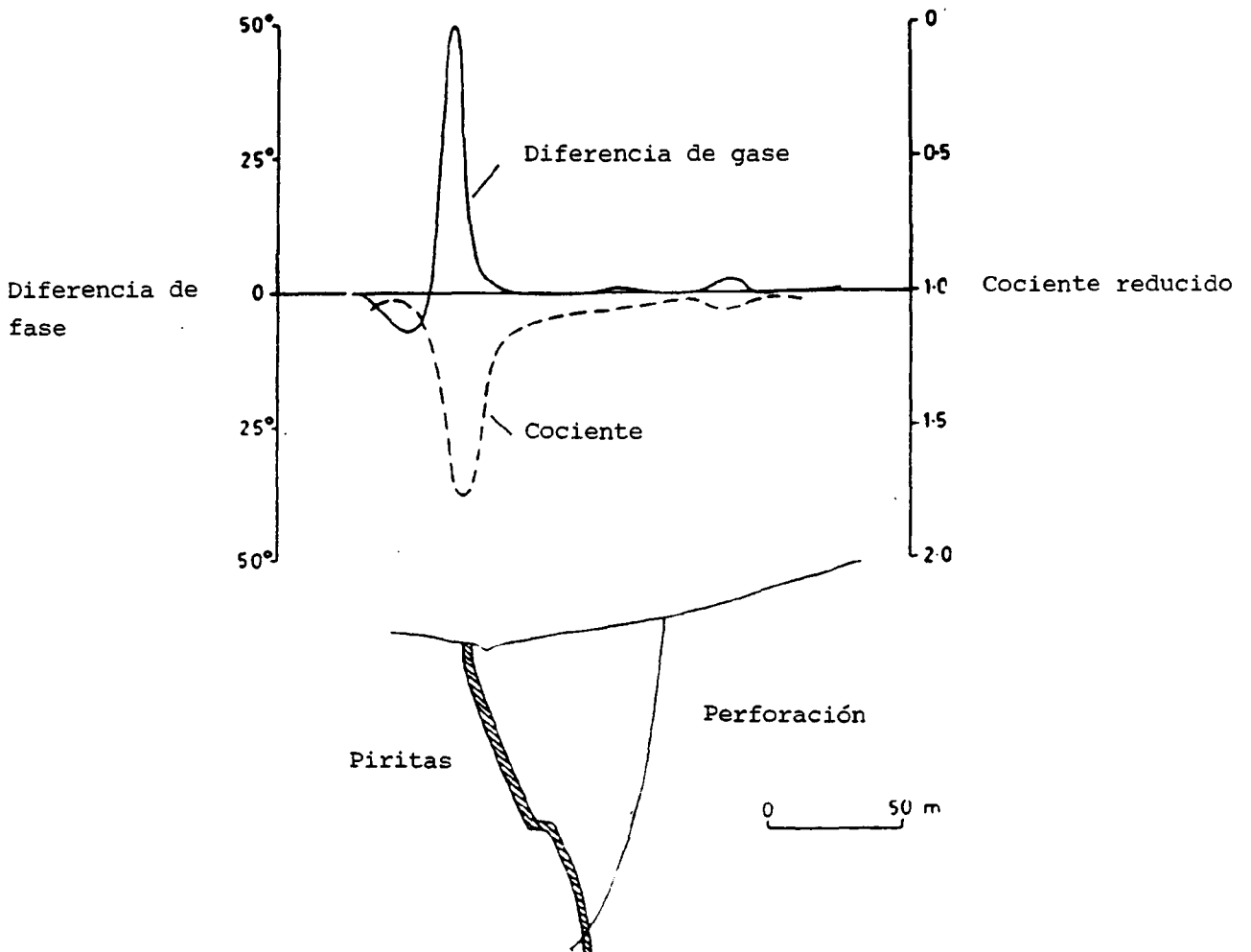
FIG. 5. Fórmula para determinar los cocientes de TURAM con un bucle rectangular.



$$V = V_p \left(\frac{r_1}{A_1} + \frac{r_2}{A_2} + \frac{r_3}{A_3} + \frac{r_4}{A_4} \right)$$

A's = Areas de los rectangulos cuyas respectivas r's son diagonales

FIG. 4



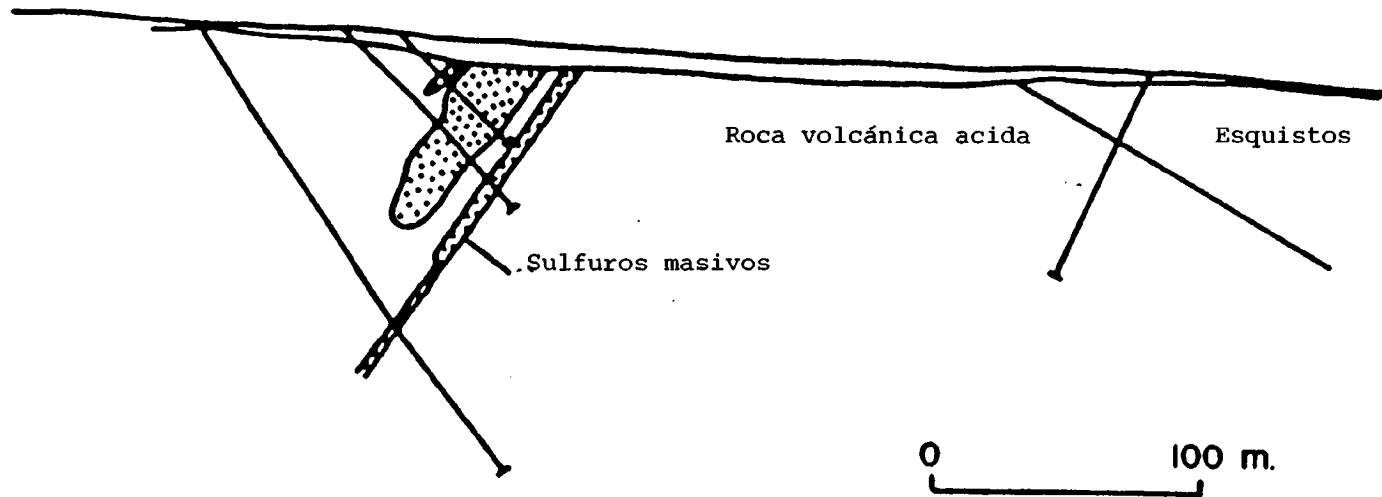
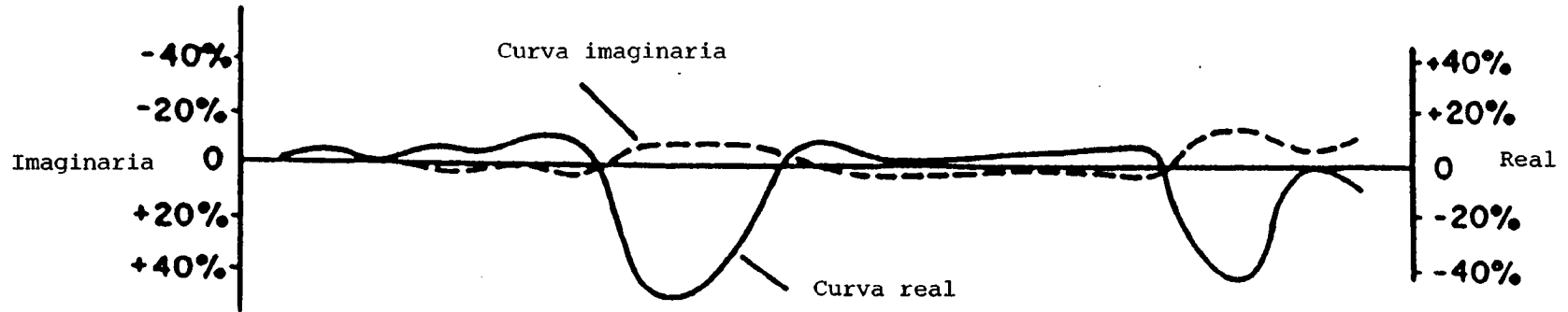
Por encima de los conductores verticales las curvas real e imaginaria son simétricas pero sobre un conductor profundo se transforman asimétricas. La diferencia entre ambas líneas es una muy buena guía para establecer el grado de profundidad de un conductor. La figura nº 6 muestra un perfil tipo obtenido con este sistema sobre una mineralización de sulfuros.

El equipo debe estar compuesto por dos operarios un trasladando al transmisor y el otro al receptor.

Ambos se encuentran separados por 25-100 metros pero unidos por un cable tal y como muestra la figura nº 7. El voltaje primario le es suministrado al transmisor por un oscilador que normalmente suele trabajar en un intervalo de 605-1800 Hz y el voltaje de referencia es mandado desde el transmisor al compensador. El voltaje inducido en la bobina receptora es descompuesto en dos componentes una fase real con la referencia del voltaje y otra imaginaria 90° desfasada, sin éste.

Las magnitudes de los componentes reales se componen en el voltaje de referencia y cada una expresa un porcentaje del campo primario. Las bobinas se utilizan normalmente horizontalmente aunque puede ser utilizadas en posición vertical.

FIG. 6



Es muy importante para el buen funcionamiento del sistema que siempre se realicen las mediciones a la misma distancia puesto una ligera diferencia puede inducir a graves errores.

En el caso de una utilización de las bobinas horizontal ambas lecturas son negativas y ejercen un mínimo de influencia sobre el conductor.

3.2.2. Resistividad.

Recientemente se han desarrollado métodos para medir la resistividad en la elaboración de cartografía desde un avión. El método conocido como E-PHASE, que ha sido desarrollado por Barringer Research en Canadá, es en realidad un método EM que utiliza fuentes de transmisión en las bandas VLF (15-25 kHz) , LF (200-400 kHz) y BCB (550-1100 kHz) (Mc Neillan Barringer - 1970; Mc Neill et al. 1973), pero se incluye en esta sección y como producto final del estudio es un mapa de resistividad de contorno. El método es útil para la medida de terrenos, para el cálculo de depósitos o para la elaboración de mapas geológicos.

ESTUDIOS AEREOS ELECTROMAGNETICOS (AEM)

Una de las ventajas del estudio del EM es que no se necesitan - conexiones directas con el suelo y se ha demostrado la posibilidad de adaptación del método al trabajo aéreo.

Se ha podido utilizar el método en un amplio campo de prospec-- ción de reconocimiento con importantes éxitos, especialmente en Canadá y Suecia. Han sido empleados una gran variedad de siste-- mas que se pueden dividir en tres amplias clases:

1. Las antenas de fuente y búsqueda. Vuelan a la misma altura - montadas en un costado del helicóptero o montadas en un ex-- tremo del ala de un avión de ala fija o usando dos aviones.
2. Las antenas de fuente y búsqueda a diferentes alturas-"pája-- ro" remolcado detrás del avión.
3. Antenas de fuente en el suelo y búsqueda en avión-e.g. aéreo Turam (Turair).

Los métodos 1 y 3 pueden ser volados a una altura de 30-50m., - pero el 2 es generalmente volado a la altura de 150 m. o más, -

.../...

lo que significa una mayor desventaja. A continuación se describen algunos de los sistemas más comunes:

Helicóptero o Extremo de ala fija.- En este sistema las antenas transmisoras y receptoras van situadas en los extremos de las alas del avión o unidas a un tubo fijo debajo del helicóptero - de unos 10-20 m. de largo. El conjunto puede ser elevado a una altura de 30-50 m. y los componentes de la misma fase y los de fases diferentes son recogidos por el receptor de registro continuo y expresado como fracción del campo primario. Los conductores subterráneos dan un aumento de anomalías de varios cientos y hasta mil partes por millón y la respuesta de transmisión de misma fase/fases diferentes, es una medida aproximada de las conductividades. Con este método es importante mantener la constante de separación de la antena debido a que sólo pequeñas variaciones dan señales falsas a la misma fase.

Frecuencia Dual.- En este sistema sólo el componente de fases diferentes es controlado por el receptor o baja frecuencia (400 Hz) y una alta frecuencia (2.300 Hz). La respuesta de radio "bajo/alto" es indicadora de la conductividad de cualquier cuerpo anómalo. El transmisor se monta en el avión mientras que el receptor se une al "pájaro" a una altura de hasta 150 m. de

.../...

trás del avión. La altura de vuelo ha de ser al menos de 120 m. y la profundidad de penetración es pobre. Además existen una serie de ruidos de fondo que hacen difícil una diferenciación entre los conductores de superficie y subterráneos. El componente de fase-única no puede ser medida en este sistema debido a los movimientos del "pájaro".

Campo Rotativo.- En este sistema, que fue inventado en Suecia, el transmisor y el receptor dos antenas que van montadas en ángulo recto en unos planos horizontal y otro vertical. Las dos antenas de transmisión son alimentadas con una señal a la misma frecuencia y amplitud pero con una fase diferente de 90° resultando una rotación elíptica en el campo polarizado. Los voltajes inducidos en las antenas receptoras son uno contra otro de cambiar la fase de uno en 90° por lo que aparece la señal cero en el contador de registro en ausencia de los conductores. Campos secundarios procedentes de conductores subterráneos afectan con desigualdad a las antenas receptoras registrándose una desviación que es recogida por el contador de registro. Tanto los componentes de una misma fase como los de fases-diferentes son medidos, normalmente igual que un porcentaje de campo primario inducido en cualquier antena receptora. El sistema puede ser empleado colocando el transmisor en un avión y el receptor en -

.../...

un "pájaro", pero, siempre y cuando no sea necesaria una conexión entre el que transmite y el que recibe. Es bastante usual el usar dos aviones volando en tandem a una distancia de 300 m y el receptor colocado detrás del avión que va delante a un cable de unos 15 m. de largo.

Imput.- Este sistema que es válido para la "vibración transitoria inducida" fue desarrollado por Barrier Research en Canadá y es uno de los sistemas que más se usa en la actualidad. Una antena de transmisión de largo alcance montada en un avión recibe energía por vibraciones de corriente con intermitencia corta a un promedio de 288 vibraciones por segundo (1.1 m. vibraciones de corriente intermitencia corta seguido de 2.37 ms de "silencio"). Una antena receptora remolcada en un "pájaro" registra la amplitud de variaciones transitorias de las curvas descendentes en los intervalos entre vibraciones en un número de canales diferentes. Por ejemplo, el equipo Mark III en cuatro canales a 200, 600, 1000 y 1.600 ^m segundo después de la terminación de la vibración primaria.

3.3.3. Radiometría.

Las herramientas radiométricas aéreas son mejores que los reco

nocimientos terrestres para trabajos de reconocimiento regional porque se pueden cubrir extensas áreas rápidamente y relativamente con poco gasto, pero hay siempre el peligro de cometer importantes fallos debido a lo irregular de la zona inspeccionada. Existen numerosos casos documentales de importantes anomalías terrestres que no fueron detectadas por un reconocimiento aéreo debido a un espaciado de líneas demasiado anchas o terreno rugoso que impedía al avión el mantenimiento de un recubrimiento satisfactorio. Además los reconocimientos terrestres tienen mucho mayor poder de resolución. Por ejemplo, un depósito uranífero consta de un número de filoncillos que pueden producir una anomalía área simple larga mientras un reconocimiento terrestre con una elevada densidad de lecturas definirá los reconocimientos del filoncillo individual como una serie de anomalías sulfuradas.

Hoy en día los reconocimientos radiométricos aéreos se llevan a cabo con espectómetros de rayos γ que controla la cantidad de radiación de K,Th,U y total. El reconocimiento se realiza a una altura de 50-180 m., aunque puede ser necesario volar a una altura ligeramente superior que ésta, en áreas de terreno accidentado, con la consecuente pérdida de efectividad. La altitud a la que un reconocimiento puede realizarse depen

de sobre todo de la sensibilidad del instrumento que se está utilizando. Antes del desarrollo de los modernos espectrómetros de rayos γ , era necesario volar altitudes de 50-60m., para obtener resultados significativos con los escintilómetros y contadores utilizados. La sensibilidad de los instrumentos modernos depende del volúmen del cristal o cristales utilizados, con volúmen de cristal de 4.500 cm.³ y más, es posible volar a altitudes de 200 m. Desde la altura es decisivo la determinación de anomalías, el avión está equipado con un altímetro que permite sobrevolar el terreno con altura constante con error de \pm 10 m. ó menos.

Determinaciones más específicas se realizan a gran altura o sobrevolando un lago tomándose normalmente valores mínimos 2 ó 3- veces más profundos. Se prefieren aviones lentos ya que la detección de las zonas de menor radioactividad depende sobre todo de la cantidad de tiempo que el detector está expuesto en un área particular.

Para cubrir totalmente el área y el espaciamiento entre líneas de vuelo debería ser 1½ veces la altitud, pero esto raramente se cumple en el reconocimiento regional debido al costo, por lo que normalmente las líneas se espacian 4 veces la altitud o más.

3.3.4. Métodos electromagnéticos. Ultimos avances.

Se han realizado nuevos avances en la instrumentación y utilización de los métodos electromagnéticos. Pridmore.et.al. (Geophysics 44: 1.677) indica una variación en la utilización de las bobinas y cables de campos primarios, en la estimación de los ángulos inductores y la elipticidad dentro del intervalo 10,5 -- Hz y 86 kHz sobre sulfuros masivos en California. Han conseguido ponerla a punto de tal forma que es capaz de distinguir — entre sulfuros masivos y diseminados según varia la elipticidad y el ángulo y la relación frecuencia-distancia. También muestran como las utilizaciones de bucles en posiciones verticales proporcionan unos resultados mucho más fáciles de interpretar que las lecturas obtenidas en posición horizontal.

Lee et al. han propuesto un nuevo sistema en el que emplean dos cables paralelos que conducen corriente alterna en la misma dirección los campos horizontales, se refuerzan y los verticales se oponen a estos. El fuerte campo horizontal excita al más cercano conductor vertical y débil campo vertical un pequeño efecto sobre los conductores horizontales.

Las medidas de los compuestos de fase y fuera de fase en los -

.../...

campos vertical y horizontal se hacen a lo largo de líneas perpendiculares con respecto a los cables que conducen la corriente. Este sistema es más útil que el TURAM convencional porque los campos inducidos son uniformes en un área más extensa.

El mayor avance en Electromagnetismo es el descrito en Geophysics 44, p. 1.367. Este consiste en un helicóptero dotado con dos bobinas transmisoras de forma ortogonal y dos o tres bobinas receptoras. Los datos son recopilados digitalmente. Los perfiles y mapas son realizados por un computador. Otro uso del sistema es su utilidad para proporcionar informaciónes muy detalladas a cerca de los conductores (minerales). Para los minerales metálicos las bobinas usan la misma frecuencia 900 Hz pero el sistema puede ser utilizado para la detección de arenas y gravas usando dos frecuencias diferentes 900 y 3.600 Hz.

METODOS GEOTERMICOS

El calor procedente de la tierra es de aproximadamente $1,3 \times 10^{-6}$ cal / cm².s, pero puede mostrar amplias diferencias debido a la actividad volcánica y la presencia de fisuras y grietas que permiten la transmisión de calor del interior mediante aguas subterráneas. El calor solar, aumenta un $1,2 \times 10^{-2}$ cal/-

.../...

cm^2 .s el de la tierra, y es de varios ordenes de magnitud mayor que el procedente de la tierra propiamente dicha. Por lo que -- puede despreciarse éste en comparación con el de la radiación solar.

Debido a la conductividad termal extremadamente baja de suelos y rocas, sin embargo, los efectos del calor solar a determinadas profundidades, son de escasa relevancia. El calor solar se puede considerar que tiene componentes diversos y estacionales. - Los efectos se pueden detectar a profundidades de hasta 1 m. - aproximadamente y, aunque los efectos estacionales penetran a - profundidades de 20 m., tienen un muy largo período con poquísimos cambios día a día. Así, mediciones de temperatura en profundidades de 1-2 m. por debajo de la superficie se pueden utilizar como un método geofísico para investigar mediante anomalías modelos de calor que pueden tener alguna relación con estructuras subterráneas.

El procedimiento de campo básico consta de una serie de sondeos con barrenos cortos superior a los 2m. de profundidad y situando sensores de temperatura en el fondo de los agujeros. El testigo corriente se hace de plástico y tiene un sensor de resistencia de platino al final, que puede medir temperaturas con -

.../...

una precisión de $0,025^{\circ}\text{C}$. Después de insertado el testigo, un -- lapso de tiempo de 1 h. es en condiciones normales suficiente - para su estabilización .Las mediciones se suelen realizar en te rrenos secos, pero si las condiciones son húmedas es deseable - que el nivel del agua sea lo más alto posible. Las medidas en - la zona de transición entre terrenos secos y saturados tienden- a dar valores irreales. Además la presencia de vegetación afec- ta en los valores obtenidos y se necesita aplicar correcciones- al pasar de bosque a campo abierto. En los trópicos las lectu- ras en zonas de gran vegetación pueden ser hasta $2-3^{\circ}\text{C}$ superio- res que la lecturas en sabanas desiertas. Las lecturas se pue-- den comparar de una estación a otra.

El método ha sido utilizado en algunos casos para la localiza-- ción de fallas y domos salinos (Poley y Steveninck , 1.970). - Se han observado anomalías termales (tanto positivas como nega- tivas) del orden de 1°C sobre algunas zonas de fallas mientras que los domos salinos pueden producir anomalías térmicas posi- tivas de $1-2^{\circ}\text{C}$.

Los reconocimientos geotérmicos se han empleado tambien en la- prospección para energía geotermal y aguas subterráneas.

Puesto que la oxidación de sulfuros es una reacción exotérmica, es probable que las anomalías geotermales pueden aparecer sobre zonas de mineralización y es factible que los métodos geotérmicos pudieran tener alguna aplicación en exploración mineral. -- Muy pocos trabajos se han hecho en este campo, sin embargo, no hay suficientes datos para determinar la eficacia del método.

4.- EVALUACION

4.1. Objeto de la evaluación minera.-

A diferencia de las demás obras de carácter industrial, los yacimientos de minerales tienen características específicas, la primera de las cuales es la limitación absoluta o relativa de los componentes útiles. La evaluación económica tiene por objeto definir en un yacimiento así limitado, desde los puntos de vista correspondientes a la naturaleza, al tiempo y al valor, cual es el grado de orientación de las cantidades disponibles de componentes útiles.

La segunda característica fundamental del yacimiento es su irreversibilidad, en el sentido de que una vez realizada la explotación, no puede ser renovada, lo cual sitúa a la metodología de la evaluación en el deber de indicar las consecuencias económicas de las inversiones en una explotación destinada, en definitiva, a desaparecer.

La evaluación económica tiene después por objeto el indicar los efectos que se derivan de la inversión de medios, de cada vez mayor cuantía, en la prospección, construcción, explotación y enriquecimiento de los minerales. Las inversiones superiores en la explotación de los filones pobres (los filones ricos se van

haciendo cada vez menos numerosos) llevan consigo el aumento de los gastos por unidad de producto en las explotaciones de menor envergadura, mientras que los precios de venta en el mercado no evolucionan en proporción a la tendencia de aumento de los precios de obtención.

La variabilidad de las condiciones naturales, por lógica y notoria que sea en la industria minera, representa un problema constante que dificulta en gran medida la planificación y el cálculo del proceso de producción. La evaluación económica, al reducir los índices naturales y las condiciones de explotación a una expresión de valor, se propone indicar los resultados netos, como diferencia entre los precios de venta y los gastos de explotación. Al hacerlo así, la evaluación económica hace en realidad el resumen no sólo de la sustancia mineral en su estado estático (tal como viene dada por la naturaleza), sino también de los cambios que intervienen o intervendrán en el curso de la explotación.

Finalmente, la evaluación económica del yacimiento relaciona la expresión de valor obtenida en una fecha determinada, en el sentido de que indica el "valor actual". De hecho, esto quiere decir que el factor tiempo es uno de los elementos que dan su

fisonomía a la evaluación económica. La repercusión directa del efecto del factor tiempo en los resultados de la evaluación económica se refleja ante todo en la indicación del tiempo de explotación, que se obtiene situando la cantidad de las reservas con respecto a la capacidad de explotación. El tiempo de explotación es también fundamental para determinar el importe de la tasa de amortización de las obras de prospección y de los trabajos en la mina.

Los datos sobre la evaluación económica de los yacimientos son una buena base para la planificación perspectiva de las prospecciones ulteriores, porque indican en qué casos conviene realizar más prospecciones y a qué llegarán estas últimas. Los datos sobre la evaluación económica de los yacimientos en los que ya se ha utilizado prospecciones, sirven no solo para completar el inventario de la riqueza mineral, sino también para la apreciación de la eficacia del trabajo de las Empresas, grupos y equipos que han procedido a realizar las prospecciones.

4.1.1. Supuestos fundamentales de la evaluación económica.

La evaluación económica de los yacimientos prolonga en realidad la evaluación natural terminal, puesto que los datos naturales,

.../...

están incompletos, ya que no indican el tiempo que durará la explotación, así como tampoco el tiempo en que se define el potencial del yacimiento. Esto significa que la evaluación económica debe conducir todos los factores materiales a una expresión de valor comparable, tomando en consideración, dado el caso, las reservas de las que se tienen la seguridad de que se podrán explotar y vender, y producir de esta forma unos resultados materiales determinados.

Colocando las reservas seleccionadas para la evaluación económica en función de la capacidad anual es como se obtiene el tiempo de explotación que se toma en consideración como factor de la evaluación económica.

En la apreciación de la capacidad de explotación, es preciso que señalemos que, con seguridad, nos conviene tomar en consideración la capacidad óptima, en la cual la producción es cuantitativamente más fuerte y los gastos por unidad los más bajos. La curva del diagrama nos muestra que la capacidad óptima se sitúa en el borde de la zona de regresión, o que cuando en las minas se sobrepasa la zona óptima se entre en la zona de progresión, que influye en forma muy desfavorable en los gastos.

4.2. Cálculo del valor actual: Método de Hoskold.-

Un negocio minero presenta la particularidad de estar abocado a un final por agotamiento del yacimiento que se explota por lo que es necesario prever la amortización del capital invertido al final de la explotación. En esta idea se basan las fórmulas de valoración, primeramente establecidas por H.D. Hoskold y luego modificadas por otros autores que presuponen una renta uniforme y utilizan dos tasas distintas: una, r' , para el interés del capital invertido; otra, r , para la amortización de dicho capital, mediante la constitución de un fondo de amortización que se va incrementando con las cantidades anuales que resultan de deducir de la renta anual, los intereses a la tasa, r . Se admite, por tanto, que la inversión inicial se recupera, al final de la vida de la mina, en su totalidad por este fondo de amortización.

En caso de arrendamiento, pudiera parecer que el agotamiento -- afecta solamente al arrendador, lo que no es cierto, ya que el arrendatario realiza unas inversiones en infraestructuras que quedan definitivamente ligadas al yacimiento; así se reconoce en la legislación de varios países, al establecerse que el factor de agotamiento debe beneficiar equitativamente a arrendador

.../....

y arrendatario.

Debemos convenir que un negocio minero debe ser considerado como una anualidad cuyo valor puede calcularse: la transferencia del mismo, por tanto, no es más que la de la anualidad equivalente a la renta que se espera obtener de él. En esta idea, la cifra base de la transferencia se calcula mediante las fórmulas del valor actual de una anualidad a interés compuesto. O, en otras palabras, el valor actual de una mina deberá equivaler a la suma de los valores actuales de la renta que pueda proporcionar durante los años que dure su explotación.

Es de conocimiento común que a pesetas, colocadas a interés compuesto de tasa r , se convierten al final del primer año en : --
 $a + a.r = a(1+r)$; al final del segundo año, se habrán convertido en $a(1+r) + a(1+r).r = a(1+r)^2$; y así sucesivamente se obtiene, para n años, la fórmula:

$$(4.1) \quad S = a(1 + r)^n$$

Inversamente, la cantidad a que, con sus intereses acumulados de tasa r durante n años, nos dará el capital S será:

.../...

$$a = \frac{S}{(1 + r)^n}$$

siendo el interés acumulado:

$$I = a(1 + r)^n - a;$$

por tanto, (a) es el valor actual de la cantidad S.

Una anualidad de amortización A es la cantidad que se abona o rescata, al final de cada año, de forma que pueda cancelar en n años una deuda C, con sus intereses compuestos de tasa r acumulados. El valor total de dicha anualidad al cabo de n años se rá:

$$\begin{aligned} C &= A + A(1 + r) + A(1 + r)^2 + \dots + A(1 + r)^n = \\ &= A \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \quad (4.2) \end{aligned}$$

de donde:

$$A = \frac{C \times r}{(1 + r)^n - 1} \quad (4.3)$$

Nótese que, en esta fórmula, A, puede representar las cantidades anuales que constituyan un fondo de amortización que, al cabo de n años, equivalga al capital invertido.

Por otra parte, el valor actual de la anualidad será:

$$V_a = \frac{A}{(1+r)} + \frac{A}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A}{(1+r)^n} =$$
$$= A \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} \quad (4.4)$$

La fórmula (4.3) puede convertirse en otra más general e independiente del capital invertido C, con sólo sustituir la anualidad A por el porcentaje que represente de dicho capital, es decir, por X% y C por 100:

$$X\% = \frac{100\% \cdot r}{(1+r)^n - 1}$$

y de aquí, podemos calcular el número de años necesarios para la amortización, despejando n:

.../...

$$(1 + r)^n - 1 = \frac{r}{X}$$
$$n = \frac{\log\left(\frac{r}{X} + 1\right)}{\log(1 + r)} \quad (4.5)$$

Si hacemos n infinito, en la fórmula (4.4) expresada de esta --
forma:

$$V_a = \frac{A}{r} - \frac{A}{r(1 + r)^n}$$

nos quedará: $V_a = \frac{A}{r}$, que es la fórmula de una perpetuidad -
o anualidad perpetua.

No es necesario advertir que todas estas fórmulas y las que si-
guen, tienen su representación gráfica.

VALOR ACTUAL CON RENTA ANUAL UNIFORME. FORMULA DE HOSKOLD.

Supongamos que, del estudio detenido de una mina y del proyecto
de explotación en su caso, se deduce que podrá producir una ren
ta anual b durante los n años que durará su explotación, que se
prevé comenzar m años después de adquirida.

.../...

Para abordar el caso más general, vamos a considerar tres tasas distintas:

r = para amortización del capital a invertir

r' = para el interés del capital invertido, durante los n años -
de explotación

r'' = para el interés del capital invertido, durante los m años -
de preparación

Según hemos razonado en páginas anteriores, debemos considerar la renta b como una anualidad diferida m años, cuyo valor actual vamos a calcular.

La relación entre dicho valor actual V_a y el valor que esta cantidad tendrá al transcurrir los m años sin producción, que designaremos por V_m viene dada por la fórmula (4.1) que habíamos deducido anteriormente, haciendo las correspondientes sustituciones, es decir, por:

$$V_m = V_a (1 + r'')^m$$

Y con objeto de sustituir en esta igualdad el valor de V_m en función de b , renta anual que se espera obtener, vamos a consi-

.../...

derar ésta descompuesta en dos partes, destinadas respectivamente a abonar los intereses del capital V_m y la amortización de dicho capital; es lo que se denomina anualidad de amortización de doble tasa.

El interés anual del capital V_m , será: $r' \times V_m$ por lo que la cantidad destinada al fondo de amortización vendrá dada por: $A = b - r' V_m$. Por otra parte, la relación entre V_m y A es la expresada por la fórmula (4.2) donde, haciendo las correspondientes sustituciones, queda:

$$V_m = A \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Si sustituyamos aquí V_m y A por sus valores, anteriormente indicados, obtendremos:

$$V_a (1 + r'')^m = \left[b - V_a r' (1 + r'')^m \right] \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

y despejando V_a tendremos la fórmula del valor actual, en el caso más general que estamos considerando:

.../...

$$(4.6) \quad V_a = \frac{\frac{b}{r}}{\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r'')^m} + r'}$$

En el caso de que la renta comience a devengarse a partir del primer año, m será nulo y la fórmula anterior se convertirá en la siguiente:

$$V_a = \frac{b}{\frac{r}{(1+r)^n - 1} + r'} \quad (\text{fórmula de Hoskold})$$

que es la fórmula de evaluación de Hoskold, establecida por este autor para su aplicación a la minería u otros negocios donde de ba tenerse en cuenta el factor de agotamiento; el agotamiento es la causa que exige la amortización del capital invertido a la expiración de la vida de la mina, en este caso a tasa diferente de la tasa de interés utilizada para la renta del capital.

Como ejemplo, veamos cual sería el valor actual de un yacimiento que contenga 300.000 toneladas de mineral, cuya explotación se prevé en diez años, con una renta anual del 10 por 100 y un

.../...

5 por 100 como tasa para la constitución del fondo de amortización, estimando que se obtendrá un beneficio de 2.000 pesetas en tonelada. La fórmula de Hoskold nos da:

$$V_a = \frac{30.000 \times 2.000}{\frac{0,05}{1,05^{10}} + 0,10} = \frac{60.000.000}{0,18} = 333,33 \text{ M. pts.}$$

Conviene recordar que, para establecer el precio de compra, habrá que deducir, de este valor actual, la totalidad de las inversiones que sean necesarias realizar para la puesta en explotación del yacimiento.

Si las dos tasas anteriormente indicadas, se hiciesen iguales, la fórmula se convertirá en la siguiente:

$$V_a = b \frac{(1 + r)^n - 1}{r (1 + r)^n}$$

que no es más que la fórmula del valor actual de una anualidad b de amortización, acumulada durante n años a interés compuesto r, análoga a la (4.4).

Y si la expresión de la fórmula de Hoskold se modifica de la si

.../...

$$n = \frac{\log \left(\frac{r}{b - r' \times V_m} + 1 \right)}{\log (1 + r)}$$

Y, como $\frac{b - V_m \times r'}{V_m}$ representa el porcentaje del valor actual que va al fondo de amortización, su valor puede representarse por X%, quedando entonces la fórmula:

$$n = \frac{\log \left(\frac{r}{X} + 1 \right)}{\log (1 + r)}$$

analogamente a la que obtuvimos entonces.

MODIFICACIONES A LA FORMULA DE HOSKOLD

Desde que Hoskold estableció su fórmula, en 1877, muchos autores la han discutido y propuesto su sustitución por diversas otras.

Volviendo sobre la fórmula general (4.6) en el caso de que forzosamente deba tenerse en cuenta un período diferido m de puesta en explotación, el propio Hoskold no consideraba aconsejable

.../...

la utilización de una tercera tasa r'' para dicho período, y opinaba que debía utilizarse la misma tasa de riesgo r' . La fórmula general se convierte entonces en la:

$$V_a = \frac{b}{\frac{r}{(1+r)^n} - 1 + r'} \times \frac{1}{(1+r')^m}$$

Sin embargo, numerosos autores rechazan esta fórmula y la anteriormente expresada porque, para su obtención, se ignora que el capital desembolsado está siendo amortizado por las cantidades destinadas al fondo de amortización, como puede comprobarse si recordamos que, al deducirla, se consideraba la cantidad constante $V_m \times r'$ como interés anual del capital; este interés debe ser exclusivamente el correspondiente al capital residual.

Para obtener la fórmula propuesta por dichos autores, veamos -- cual será el capital residual en los sucesivos años.

Al final del primer año será:

$$V_a + r'V_a$$

.../...

Al final del segundo:

$$\begin{aligned} V_a + r'V_a + r'V_a + r \times r'V_a &= \\ &= V_a + r'V_a [1 + (1+r)] \end{aligned}$$

Al final del año m:

$$\begin{aligned} V_a + r'V_a (1+r) + (1+r)^2 + \dots + \\ + (1+r)^{m-1} \end{aligned}$$

Al final del año m + 1:

$$V_a + r'V_a (1 + \dots + (1+r)^m) - b$$

Al final del año m + 2:

$$V_a + r'V_a (1 + \dots + (1+r)^{m-1}) - b (1 + (1+r))$$

Al final del año m + n:

$$\begin{aligned} V_a + r'V_a (1 + \dots + (1+r)^{m+n-1}) - \\ - b (1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{n-1}) \end{aligned}$$

.../...

Y, como al final de este período, el capital residual debe ser nulo, resulta:

$$\begin{aligned} V_a + r'V_a (1 + \dots + (1 + r)^{m + n-1}) &= \\ = b (1 + \dots + (1 + r)^{n-1}) & \end{aligned}$$

de donde, sustituyendo las series por su suma y despejando V_a :

$$V_a = \frac{b \frac{(1 + r)^n - 1}{r}}{1 + r' \frac{(1 + r)^{m + n} - 1}{r}}$$

que es la fórmula propuesta por O,Donahue.

Otros autores, como Morkill, proponen una fórmula análoga, pero utilizando una tasa única de riesgo r' que se obtiene de la anterior haciendo $r = r'$, en este caso y cuando el tiempo diferido sea nulo, se obtiene la siguiente:

$$V_a = b \cdot \frac{(1 + r')^n - 1}{r' (1 + r')^n}$$

que es análoga a la fórmula (4.4).

.../...

Es claro que las dos últimas fórmulas dan valores actuales más altos que la de Hoskold; en el caso de la primera, la diferencia es apreciable para períodos cortos de puesta en marcha; para períodos largo, dicha diferencia disminuye.

Finalmente, otros autores, en cuya fórmula no entraremos, proponen la utilización de una tasa, que denominan "de semirriesgo", sobre el capital acumulado en el fondo de amortización, justificándolo porque, siendo posible, y quizás deseable, disponer del fondo de amortización para otros fines distintos del de reintegro del capital, el inversor tiene derecho a participar de los beneficios que puedan derivarse de tal uso.

VALOR ACTUAL CON RENTA ANUAL NO UNIFORME

La fórmula del valor actual se obtiene de forma en todo análoga a la seguida en el caso de renta uniforme. Siendo $V_a \cdot r'$ el interés anual de la inversión, las cantidades destinadas por $b_m - V_a \cdot r'$, siendo b_m (b_1, b_2, \dots, b_n) la renta anual variable.

$$V_a = (b_1 - V_a \cdot r') (1 + r)^{n-1} + (b_2 - V_n \cdot r')$$

.../...

$$\begin{aligned}
 & (1 + r)^{n-2} + \dots + (b_n - V_a \cdot r') = \\
 & = \text{Suma de la serie } b_m (1 + r)^{n-m} - \\
 & - V_n \cdot r' \frac{(1 + r)^{n-1} - 1}{r}
 \end{aligned}$$

O sea, que:

$$V_a = \frac{\sum b_m \cdot (1 + r)^{n-m}}{1 + r' \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}} \quad (4.7)$$

De esta, se deducirá inmediatamente la fórmula de Hoskold, si la renta anual fuera uniforme y de valor b . En la aplicación de esta fórmula, los ingresos negativos o insuficientes para cubrir el interés y la amortización se manifestarán en una disminución temporal del fondo de amortización, para cubrir el déficit, que será compensada con el primer ingreso positivo, o con éste y sucesivos.

4.3. Metodología en países socialista.-

4.3.1. Exposición de la metodología utilizada.

PREMISAS FUNDAMENTALES

También podemos definirla como metodología de la evaluación económica de las minas y yacimientos, y prescindir de la de procedimiento para el cálculo del valor de los minas y yacimientos, - debido a que se ha establecido en función de las condiciones yu goslavas. Respetando la teoría marxista del valor del trabajo, - vemos que surge el problema de saber si se puede atribuir valor al yacimiento que ha sido dado por la naturaleza y que no ha si do creado por el trabajo humano. Tampoco hablamos del valor si no de la evaluación económica del yacimiento procedente de su - "rentabilidad condicional", la cual conferirá un "valor social", correspondiente si el yacimiento se pone en explotación. Aunque no haya concurrido un trabajo humano a la creación del yacimien to, no se puede negar que en su descubrimiento y en su estudio se ha empleado un trabajo humano muy calificado, y principalmen te, intelectual. Este trabajo ha permitido establecer, lo que-- el yacimiento contiene, si se puede explotar, en qué condicio-- nes y con qué resultado.

.../...

Hemos procurado que esta metodología sea compleja y única por la concepción y por los principios en que se funda, pero que al mismo tiempo sea suficiente flexible para permitir su más amplia aplicación. Así, por ejemplo, la solución de los importes de base desiguales y el método del descuento con doble cifra de interés es aplicable a todos los países y a todos los sistemas.

Lo mismo ocurre con la cifra del interés correctivo definido, mientras que la fijación de los importes de base, en los que entran el sobretrabajo y la amortización es aplicable en los países en los que las minas y los yacimientos son de propiedad social. Para los restantes países la metodología sería modificada en el sentido de que habría que tratar la amortización como un gasto.

LAS RESERVAS PARA LA EVALUACION ECONOMICA Y EL TIEMPO DE EXPLOTACION.

Para la evaluación económica no es preciso tomar en consideración más que las reservas que se puedan realizar con seguridad en el mercado y producir los efectos materiales contabilizados.

Lo cual indica que se ha procedido a realizar una doble reduc--

.../...

ción en las reservas geológicas, porque no ha tomado en consideración las reservas que no fueran suficientemente seguras, mientras que se estudian también las pérdidas de componentes útiles. Las cantidades así obtenidas se ponen en relación con la capacidad y se obtiene el número de años de explotación, que se designa en las fórmulas por el símbolo "n".

Nuestra metodología tiene en cuenta, sin embargo, todas las reservas geológicas, porque la parte no englobada en las reservas de la categoría C_1 , así como las reservas fuera de balance, se toman en consideración para la determinación del factor correctivo.

EL SOBRETABAJO Y LA AMORTIZACION

El sobretrabajo designa los resultados materiales netos que se obtiene deduciendo del valor de todos los componentes útiles - vendidos todos los gastos, a excepción de la amortización. En las condiciones yugoslavas, el sobretrabajo engloba las formas de acumulación (impuestos, arbitros, contribuciones, etc.) que revierten en la Sociedad, así como la acumulación propia de la empresa. El sistema de reparto y de cálculo ha separado con claridad entre nosotros de la acumulación todos los tipos de

.../...

gastos, aunque en la práctica no hay ningún problema para definir los importes base; es decir, el sobretrabajo y la amortización, que en las fórmulas se designan por los símbolos "VP + A".

LA CIFRA DE INTERES NORMAL Y LA DE INTERES CORRECTIVO

La cifra de interés normal debe asegurar la indemnización de los medios invertidos; es decir, debe producir un interés al menos igual al que se produciría por la inversión en cualquier otra producción. Por eso el interés se fija en función de la cifra que los bancos de inversión exigen para los créditos que estos conceden para financiar los trabajos de la industria extractiva. Este interés que en la práctica variaría entre el 4 y el 7 por 100 en las fórmulas se designa por el simbolo "r".

El interés correctivo depende de los factores que influyen sobre el factor correctivo, tal como se toman en consideración en un principio las condiciones naturales variables y los riesgos geológicos, de explotación, económicos y otros. Al mismo tiempo, para la determinación de este factor se tienen en cuenta las reservas fuera de balance, las pérdidas y las condiciones de utilización de los componentes útiles. Las fluctuaciones del mercado, las posibilidades de sustitución, las deficiencias y -

.../...

la intensidad de la demanda y del consumo, los informes sobre el mercado internacional, las condiciones de la división internacional del trabajo y otros aspectos. En la práctica de la evaluación en Yugoslavia, la cifra del interés correctivo se ha fijado en forma individual para cada mina y para cada yacimiento, y ha variado entre el 4 y el 8 por 100; en las fórmulas se de--signa por el símbolo " r_1 ".

LAS VARIACIONES DE LOS IMPORTES DE BASE EN RAZON DE LA MODIFICA CION DE LAS CONDICIONES NATURALES Y DE LA PRODUCTIVIDAD.

Hemos dicho que éste elemento no ha sido introducido en la evaluación por ningún autor y que lo hemos introducido en nuestra metodología porque consideramos que, prácticamente, no cabe pensar que los importes de base permanezcan sin cambiar de un año para otro a lo largo de todo el período de explotación. La va--riación constante de los importes de base no se debe solo al --mercado, sino también a los cambios constantes de la productividad en el trabajo y de los medios. El crecimiento de la produc--tividad del trabajo es una categoría constante y dinámica en la que influyen factores nautrales técnicos, humanos y de organiza--ción.

Pensemos que para definir con mayor facilidad esta categoría en la práctica de la evaluación económica, lo mejor es definirla - por prorratio del importe de base inicial. El cálculo y la representación de las variaciones de la productividad se puede establecer matemáticamente de dos formas: con ayuda de una progresión aritmética o de una progresión geométrica. Estas variaciones se designan en las fórmulas respectivamente por los símbolos "d" y "q".

LAS FASES Y LAS FORMULAS DE LA METODOLOGIA COMPLEJA DE EVALUACION

Nuestra metodología exige que se reduzcan al día de la evaluación los efectos netos de la futura explotación; es decir, a su "valor actual". Se llega a esto descontando con la doble cifra los importes de base, con ayuda de las cifras de interés normal y correctivo, de forma que la evaluación se compone de dos fases esenciales:

En la primera fase, los importes de base ($VP + A$) se descuentan con la cifra de interés normal (r) para el número previsto de años de explotación (n). Hemos designado la fórmula de la primera fase de la evaluación por los símbolos EO_1 y, finalmen-

.../...

te, la hemos expresado en la fórmula siguiente:

$$EO_1 = \frac{VP + A}{1 + \frac{r}{100} n}$$

Teniendo en cuenta que el yacimiento se explotará durante va—
rios años y que en cada uno de éstos realizará importes base --
adecuados, en el cuadro indicamos la evolución de esta fór—
mula.

CUADRO

Forma evolutiva de la fórmula EO_1

$$EO_1 = \frac{(VP + A)_1}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)} + \frac{(VP + A)_2}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2} + \frac{(VP + A)_3}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^3} + \dots + \frac{(VP + A)_n}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n}$$

puesto que $\left(1 + \frac{r}{100}\right) = R$, la conversión correspondiente nos --
da:

$$EO_1 = \frac{(VP + A)_1}{R} + \frac{(VP + A)_2}{R^2} + \dots + \frac{(VP + A)_n}{R^n}$$

.../...

En las minas de importes anuales de sobretrabajo y amortización iguales, la evolución económica se puede simplificar todavía, - hasta obtener:

$$EO_1 = \frac{VP + A}{R} + \frac{VP + A}{R^2} + \frac{VP + A}{R^3} + \dots + \frac{VP + A}{R^n}$$

$$EO_1 = (VP + A) \frac{R^{n-1} + R^{n-2} + R^{n-3} + \dots + 1}{R^n}$$

o bien

$$EO_1 = (VP + A) \times$$

$$\frac{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-2} + \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-3} + \dots + 1}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n}$$

de donde se obtiene la fórmula final

$$EO_1 = (VP + A) \frac{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1}{\frac{r}{100} \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n}$$

Si acudimos a las tablas de interés compuesto, la fórmula puede

.../...

expresarse así:

$$EO_1 = (VP + A) \cdot IV \frac{n}{r}$$

En la segunda fase de la evaluación (EO_2) el importe obtenido - en la primera fase se descuenta en función de la cifra de interés correctivo (r_1), aunque la fórmula final para la segunda fase se presenta en la forma siguiente:

$$EO_2 = \frac{EO_1}{\left(1 + \frac{r_1}{100}\right)} \cdot IV \frac{n}{r}$$

De la concepción matemática de estas dos fórmulas se observa -- que cuanto mayores sean las cifras de interés "r" y "r₁" que se aplican, más pequeña será la expresión de la evaluación económica.

En nuestra metodología hemos diferenciado el caso de que se trate de minas activas, de minas en preparación y de yacimientos - de explotación aplazada. En estos tres grupos de fórmulas hemos introducido, además, el factor de modificación de la productividad del trabajo, de los medios y de las condiciones naturales, - lo cual permite de hecho una variación correspondiente de los -

.../...

importes base.

METODOLOGIA PARA LAS MINAS ACTIVAS

Para la representación de la variación de los importes base en función de la progresión aritmética, hemos construido la fórmula EO_3 , cuya forma evolutiva viene indicada en el cuadro, y cuya expresión final es la siguiente:

$$EO_3 = \frac{(VP + A) \cdot IV_r^n + \frac{100d}{r} (IV_r^n - n \cdot II_r^n)}{1 + \frac{r_1}{100} \cdot IV_r^n}$$

CUADRO

Forma evolutiva de la fórmula EO_3

$$EO_3 = \frac{(VP + A) - \frac{r_1}{100} EO_3}{1 + \frac{r}{100}} + \frac{(VP + A) + d - \frac{r_1}{100} EO_3}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2} + \frac{(VP + A) + 2d - \frac{r_1}{100} EO_3}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^3} + \dots$$

.../...

$$\dots + \frac{(VP + A) + (n-1) d - \frac{r_1}{100} EO_3}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n}$$

Teniendo en cuenta que $\left(1 + \frac{r}{100}\right) = R$, al sustituir en la ecuación, tenemos:

$$EO_3 = \frac{(VP + A)}{R} + \frac{(VP + A) + d}{R^2} + \frac{(VP + A) + 2d}{R^3} +$$

$$+ \frac{(VP + A) + (n-1) d}{R^n} \left(\frac{\frac{r_1}{100} EO_3}{R} + \frac{\frac{r_1}{100} EO_3}{R^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{r_1}{100} EO_3}{R^3} + \dots + \frac{\frac{r_1}{100} EO_3}{R^n} \right)$$

$$EO_3 = \left(\frac{(VP + A)}{R} + \frac{VP + A}{R^2} + \frac{VP + A}{R^3} + \dots + \frac{VP + A}{R^n} \right) +$$

$$+ \left(\frac{d}{R^2} + \frac{2d}{R^3} + \dots + \frac{(n-1)d}{R^n} \right) - \frac{r_1}{100} \times$$

$$\times EO_3 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^3} + \dots + \frac{1}{R^n} \right)$$

.../...

Sustituyendo los equivalentes de las tablas de interés compuesto, se obtiene:

$$EO_3 = (VP + A) \cdot IV_r^n + \frac{100d}{r} (IV_r^n - n II_r^n) - \frac{r_1}{100} EO_3 \cdot IV_r^n$$

$$EO_3 \cdot \left(1 + \frac{r_1}{100}\right) \cdot IV_r^n = (VP + A) \cdot IV_r^n + \frac{100d}{r} (IV_r^n - n \cdot II_r^n)$$

$$EO_3 = \frac{(VP + A) \cdot IV_r^n + \frac{100d}{r} \cdot (IV_r^n - n \cdot II_r^n)}{\left(1 + \frac{r_1}{100}\right) \cdot IV_r^n}$$

Para la representación de la variación de las sumas de base según la progresión geométrica, hemos establecido la fórmula EO_1 , obtenida sobre la base de cálculo del cuadro , cuya expresión final es:

$$EO_4 = (VP + A) \frac{q^n - R^n}{R^n (q-R) \left(1 + \frac{r_1}{100}\right) IV_r^n}$$

CUADRO

Forma evolutiva de la fórmula EO_4

$$EO_4 = \frac{(VP + A) - \frac{r_1}{100} EO_4}{1 + \frac{r}{100}} + \frac{(VP + A) \cdot q - \frac{r_1}{100} EO_4}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2} +$$

$$+ \frac{(VP + A) \cdot q^2 - \frac{r_1}{100} EO_4}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{(VP + A) \cdot q^{n-1} - \frac{r_1}{100} EO_4}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n}$$

Teniendo en cuenta que $\left(1 + \frac{r}{100}\right) = R$, al sustituir en la ecuación, resulta:

$$EO_4 = \frac{(VP + A) - \frac{r_1}{100} EO_4}{R} + \frac{(VP + A) \cdot q - \frac{r_1}{100} EO_4}{R^2} +$$

$$+ \frac{(VP + A) \cdot q^2 - \frac{r_1}{100} EO_4}{R^3} + \dots$$

.../...

$$\dots + \frac{(VP + A) \cdot q^{n-1} - \frac{r_1}{100} EO_4}{R^n}$$

$$EO_4 = \frac{(VP + A)}{R} + \frac{(VP + A) \cdot q}{R^2} + \frac{(VP + A) \cdot q^2}{R^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{(VP + A) \cdot q^{n-1}}{R^n} - \left(\frac{\frac{r_1}{100} \cdot EO_4}{R} + \frac{\frac{r_1}{100} EO_4}{R^2} + \frac{\frac{r_1}{100} \cdot EO_4}{R^3} + \dots + \frac{\frac{r_1}{100} \cdot EO_4}{R^n} \right)$$

$$EO_4 = (VP + A) \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{q}{R^2} + \frac{q^2}{R^3} + \dots + \frac{q^{n-1}}{R^n} \right) - \frac{r_1}{100}$$

$$EO_4 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^3} + \dots + \frac{1}{R^n} \right)$$

Sustituyendo los equivalentes de las tablas de interés compuesto, se obtiene:

$$EO_4 = (VP + A) \cdot \frac{q^n - R^n}{R^n \cdot (a - R)} - \frac{r_1}{100} EO_4 \cdot IV_r^n$$

.../...

$$EO_4 \cdot \left(1 + \frac{r_1}{100} \cdot IV_r^n \right) = (VP + A) \cdot \frac{q^n - R^n}{R^n (q-R)}$$

$$EO_4 = \frac{(VP + A) \cdot \frac{q^n - R^n}{R^n (q-R)}}{\left(1 + \frac{r_1}{100} \right) \cdot IV_r^n} =$$

$$= (VP + A) \frac{q^n - R^n}{R^n (q - R) \left(1 + \frac{r_1}{100} \cdot IV_r^n \right)}$$

METODOLOGIA PARA LAS MINAS EN PREPARACION

La especificidad de la metodología para este grupo de minas con siste en que los resultados se realizarán después del término de la preparación, de forma que la diferencia con las minas activas, según esta metodología consiste en que debemos introducir en los importes base el importe del sobretrabajo proyectado sin la amortización. Las fórmulas finales para la evaluación de estas minas, EO_3 y EO_6 se establecen según la variación de productividad se calcule en función de la progresión aritmética o de la progresión geométrica, y se presentan como indicamos a -- continuación:

$$EO_5 = \frac{VP \cdot IV_r^n + \frac{100d}{r} \cdot (IV_r^n - n \cdot II_n^n)}{\left(1 + \frac{r_1}{100}\right) \cdot IV_r^n}$$

$$EO_6 = \frac{VP \cdot \frac{q^n - R^n}{R^n (q-r)}}{\left(1 + \frac{r_1}{100}\right) \cdot IV_r^n}$$

METODOLOGIA PARA LOS YACIMIENTOS QUE SE PONDRAN EN EXPLOTACION MAS ADELANTE

Esta metodología es aplicable a los yacimientos que todavía no han sido puestos en explotación y a los que se encuentran en -- curso de prospección. En este caso es importante establecer el número de años de aplazamiento de la explotación, designado en las fórmulas por el símbolo "m" y fijar un factor correctivo -- particular, característico para las condiciones de explotación aplazada, designado aquí por el símbolo "r₂". Las fórmulas finales EO₇ y EO₈ se establecen según se realice el cálculo en función de la progresión aritmética o de la progresión geométrica y se expresan en la forma siguiente:

$$EO_7 = EO_5 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{r_2}{100}\right)^m}$$

.../...

$$EO_8 = EO_6 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{r_2}{100}\right)^m}$$

4.3.2. Resultados de esta metodología

La metodología presentada es conocida de la opinión pública desde la aparición del libro (1) y ha sido aplicado parcialmente - en estudios, programas de inversión, proyectos, análisis y tasaciones bancarias, para numerosas minas y yacimientos en Yugoslavia y en otros países (Etiopía, Sudán, Jordania, Argelia, etc.) Numerosos institutos, bancos, oficinas de estudios, empresas y compañías se interesan por su empleo.

La aplicación compleja de esta metodología tiene por eje la estimación del valor de los recursos minerales de Yugoslavia. Esta aplicación compleja es más importante por el hecho de que da una buena indicación para la elección de las variables prioritarias en el momento de la financiación, para el establecimiento de los planes prospectivos de prospección, así como para la demostración de la eficiencia de las prospecciones efectuadas.

Los resultados de la evaluación y los análisis que se han lleva

.../...

do a cabo han indicado la cuantía y la estructura de los recursos minerales del país y de sus regiones. Además, sobre la base de los indicadores de valor y de la cantidad de las reservas se ha hecho el análisis de los resultados de la evaluación, concretizados por unidad de reservas, lo cual permite una elección segura de las orientaciones prioritarias propias para asegurar -- efectos estables.

Por otra parte, los resultados obtenidos han dado índices característicos para la determinación y la definición de la capacidad de acumulación de los minerales por unidad de reservas. Esto ha constituido la base para la determinación de los costes marginales de prospección por tonelada de reservas constatadas, lo cual ha permitido fijar de antemano los límites hasta los -- que se podían soportar los costes de prospección para los diferentes minerales.

Los indicadores de valor de la evaluación han constituido la base para la elección de las orientaciones óptimas en la prospección y en la planificación perspectiva. Las orientaciones óptimas así definidas han constituido la base para la elección de -- las prioridades, que han indicado en qué tipos de minerales -- eran más ventajosas las inversiones, y después, concretamente,

.../...

en qué yacimientos.

En consecuencia, las experiencias hasta aquí adquiridas en la aplicación de esta metodología de evaluación económica, han mostrado que ésta se podía aplicar con gran amplitud y que el método de examen de los resultados obtenidos permitían establecer abundantes relaciones características y llegar a conclusiones útiles para la elección de orientaciones juiciosas y de variantes óptimas en economía minera.

4.4. El riesgo en la inversión minera.-

4.4.1. El riesgo de una inversión.

En general el futuro u horizonte económico de una inversión difi-
cilmente puede conocerse con precisión, pues una serie de facto-
res o agentes externos incontrolables, ajenos al propio proyecto,
condicionan e influyen en los resultados del mismo. El desembol-
so inicial, los flujos netos de caja, e incluso la duración de -
la inversión, en innumerables casos se comportan de forma aleato-
ria. En el mundo económico actual nos movemos siempre -o casi --
siempre- en el campo de la incertidumbre.

En muchos casos, sin embargo, las distintas magnitudes que defi-
nen la inversión se conocen con un grado de aproximación tal que
pueden ser consideradas en la práctica como ciertas o subjetiva-
mente ciertas, sin que por ello se corra el riesgo de incurrir -
en errores importantes.

Según el grado de información, se pueden distinguir tres situacio-
nes fundamentales:

1. El caso de lo cierto o subjetivamente cierto. Para una de las
magnitudes que definen la inversión sólo pueden presentar un

.../...

estado, con una probabilidad, por lo tanto, igual a la unidad.

2. El caso aleatorio o de incertidumbre medida. Las diferentes magnitudes se conocen en términos de probabilidad.
3. El caso de total incertidumbre. Las magnitudes que definen la inversión pueden presentar también distintos estados, pero no se conocen las probabilidades respectivas.

Utilizando una terminología bastante usual, se puede hablar de inversiones con riesgo, cuando se conocen las probabilidades de los posibles estados de sus magnitudes, y de inversiones con incertidumbre, cuando no se conocen tales probabilidades. Modernamente, no obstante, se considera que las situaciones de total incertidumbre son tan irreales como las situaciones con información perfecta. La rehabilitación de la probabilidad "subjetiva" o "a priori" ha hecho desaparecer, como luego veremos, las situaciones de total incertidumbre. En suma, ha hecho posible — transformar los casos de incertidumbre en casos aleatorios.

PROBABILIDAD OBJETIVA Y PROBABILIDAD SUBJETIVA

En cualquier problema económico, cuando las distintas situacio-

.../...

nes que pueden presentarse se conocen en términos de probabilidad (caso aleatorio), un criterio de decisión racional es el de la esperanza matemática. La dificultad surge en los casos de universo incierto ya que al no conocer las probabilidades no se puede aplicar el criterio de la esperanza matemática. Con el objetivo de evitar el subjetivismo en el comportamiento de decisor en estas situaciones de total incertidumbre, se han ideado los criterios de decisión clásicos (criterio de Laplace o de igual verosimilitud, pesimista o de Wald, Hurwicz, Savage, etc.), que no han resuelto el problema. Cada uno de los criterios de decisión clásicos puede dar un resultado distinto, con lo cual la subjetividad ahora se halla en la elección del criterio, ya que es necesario decidir la manera de decidir. El problema se ha trasladado de nivel sin lograr resolverlo.

Ahora bien, el sujeto decisor no se encuentra nunca realmente ante situaciones de total incertidumbre. La hipótesis de ignorancia total es tan irreal como la de información perfecta. Ante un universo incierto resulta imposible evitar la ponderación de las diferentes situaciones. De ahí que en la actualidad se haya llegado a la conclusión de que en dichas situaciones, aparentemente de máxima incertidumbre, el mejor criterio de decisión es el de la esperanza matemática, calculada utilizando las probabilidades

.../...

"a priori" o "subjetivas".

El concepto de probabilidad "a priori" o probabilidad "subjetiva", como afirma J. Hirshleifer, ha sido recientemente expuesto y desarrollado por L.J. Savage; sus antecedentes son, sin embargo, muy anteriores, como puede verse en la obra de H. Raiffa. Al hablar de probabilidad subjetiva tenemos que hacer referencia - necesariamente al gran economista de Cambridge John Maynard Keynes, a quien le corresponde un lugar de honor en esta línea de investigación y pensamiento.

La probabilidad de un suceso ya no es tan sólo -como se ha entendido clásicamente- igual a la relación entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, o igual al límite de una frecuencia. La probabilidad "subjetiva" es un número que cuantifica el concepto cualitativo de verosimilitud del sujeto decisor, y se basa en su experiencia, en su intuición, en sus sentimientos o en sus conocimientos. Esta idea de probabilidad ha sido rehabilitada por los teóricos de la decisión estadística al mostrar su utilidad en la toma de decisiones, ocupando un lugar muy destacado en esta línea la obra de R.O. Schlaifer *Probability and Statistics for Business Decisions*.

.../...

EL CRITERIO DE LA ESPERANZA MATEMATICA

En el caso aleatorio, un criterio de decisión racional es el consistente en maximizar la esperanza matemática de ganancia. El sujeto decisor elegirá aquella línea de acción -también llamada estrategia, salida o alternativa- que le proporcione la máxima esperanza matemática de beneficio. Concretamente, el inversor preferirá en primer término aquellas inversiones con un valor capital medio mayor. El criterio de la esperanza matemática, sin embargo, como muy bien dice J.J. Lambin, "no puede aplicarse más - que a los fenómenos sometidos a la ley de los grandes números, ya que es solamente en razón de carácter reiterativo del fenómeno - estudiado por lo que el centro de decisión tiene la seguridad de ver su ganancia media converger hacia el valor medio esperado".- Esto hace que dicho criterio tenga a veces un valor práctico bastante limitado, ya que la mayoría de los problemas económicos no presentan ese carácter reiterativo.

Por otra parte, el criterio de la esperanza matemática también - ha sido revisado a la luz de las modernas corrientes utilitaristas. Los valores monetarios de los distintos flujos de caja, al ser utilizados por diferentes decisores, tienen un valor subjetivo distinto. Así, lo que se debe calcular y comparar no son las

.../...

esperanzas matemáticas de beneficio, sino la utilidad (la llamada "esperanza matemática moral"). El iniciador de esta línea de pensamiento -como muy bien dice P. Massé- ha sido Daniel Bernouille en la primera mitad del siglo XVIII. Este especialista trató de mejorar el criterio de la esperanza matemática que por aquel entonces ya se admitía, pero se mostraba incapaz de explicar — nuestro comportamiento en ciertas situaciones. "Las ideas de Daniel Bernouille, tomadas por Laplace en su teoría de la esperanza moral, parecen haber sido ignoradas por la Ciencia Económica del siglo XIX". Los autores J. von Neumann y O. Morgenstern han ahondado en las ideas de Bernouille, estudiando con rigor la noción de utilidad y su incidencia en nuestra conducta.

Estudia Bernouille el caso del pobre diablo poseedor de un billete de lotería que tiene una probabilidad del 50 por 100 de ganar veinte mil ducados y una probabilidad del 50 por 100 de no ganar nada. Su esperanza matemática de ganancia es de diez mil ducados. Sin embargo, sería razonable que dicho jugador pobre aceptase la suma de nueve mil ducados ofrecidos por un señor rico antes del sorteo. La explicación de esta paradoja radica, sin duda, en que es diferente la suma de dinero de la suma de utilidad. No es la esperanza matemática de ganancia lo que hay que considerar, sino la esperanza de utilidad.

.../...

No cabe duda de que el empresario intenta maximizar la probabilidad de hacerse rico a la vez que minimiza la probabilidad de -- ruina. Ello origina un conflicto o compromiso, pues normalmente no puede uno aspirar a ser rico sin correr el riesgo de arruinarse. Se trata de un problema de equilibrio. "Volvemos a encontrar nos aquí con una línea de pensamiento igual a la de la programación lineal (maximización sujeta a restricciones)".

Hemos intentado apuntar aquí las limitaciones del criterio de la esperanza matemática. Sin embargo, bien sea trabajando con valores monetarios o utilidades, con probabilidades objetivas o subjetivas, con restricciones o sin restricciones, dicho criterio sigue siendo universalmente aceptado.

EL VALOR MEDIO DE LOS FLUJOS DE CAJA

En el caso aleatorio, un criterio de decisión racional es el consistente en maximizar la esperanza matemática de ganancia. El inverso elegirá en primer lugar a aquella inversión que le proporcione el valor capital medio más elevado; o lo que es equivalente, elegirá aquella inversión que le proporcione una tasa de retorno mayor, calculada en base a los flujos de caja medios.

Si Q_1^r es el flujo de caja r del período t ($t = 1, 2, \dots, n$; $r=1, 2, \dots, h$), P_1^r su probabilidad, A el desembolso inicial (que lo vamos a suponer conocido), y k la tasa de descuento, el valor capital medio será igual a:

$$(4.8) \text{ VCM} = -A + \frac{\sum_{r=1}^h Q_1^r P_1^r}{(1+k)} + \frac{\sum_{r=1}^h Q_2^r P_2^r}{(1+k)^2} + \dots + \frac{\sum_{r=1}^h Q_n^r P_n^r}{(1+k)^n}$$

La tasa de retorno vendrá definida por la ecuación:

$$(4.9) \text{ VCM} = 0 = -A + \frac{\sum_{r=1}^h Q_1^r P_1^r}{(1+r_m)} + \frac{\sum_{r=1}^h Q_2^r P_2^r}{(1+r_m)^2} + \frac{\sum_{r=1}^h Q_n^r P_n^r}{(1+r_m)^n}$$

La condición de efectividad de una inversión será que VCM sea positivo, o que r_m sea mayor que k . Las mejores inversiones serán aquellas que nos proporcionen un VCM (o un r_m) mayor.

Este planteamiento, consistente en decidir utilizando al valor (o tasa de retorno), calculando en base a los valores medios de los flujos de caja, aunque en un principio sea una línea de conducta coherente, no está exento de dificultades. Al trabajar en un ambiente de riesgo, el decisor no sólo tiene en cuenta el valor medio del valor capital, sino también su varianza, que es --

.../...

una media de la variabilidad de los flujos de caja, y constituye, a su vez, una medida del riesgo de la inversión. El inversor puede preferir una inversión con un valor capital menor, si la varianza de dicho valor capital es también menor. La conducta racional del empresario le llevará siempre a maximizar la esperanza de ganancia, y a minimizar la varianza. La elección de la combinación "media-varianza" dependerá, en definitiva, de la actitud hacia el riesgo del inversor, que vendrá descrita por una función de utilidad.

En este capítulo todavía no vamos a introducir la varianza en las decisiones de inversión. Adoptaremos la decisión tomando como base el valor medio de los flujos de caja, ya se utilizando el criterio del valor capital o de la tasa de retorno.

Sea una inversión, cuyos datos aparecen recogidos en el siguiente esquema.

.../...

TABLA 1

	Momento actual	Año 1	Año 2	Año 3
Flujos de Caja	$Q_0^1 = 12.834,32$	$Q_1^1 = 12.000$ $Q_1^2 = 18.000$	$Q_2^1 = 10.000$ $Q_2^2 = 14.000$	$Q_3^1 = 5.000$ $Q_3^2 = 7.000$ $Q_3^3 = 13.000$
Probabilidades	$P_0^1 = 1$	$P_1^1 = 0,5$ $P_1^2 = 0,5$	$P_2^1 = 0,5$ $P_2^2 = 0,5$	$P_3^1 = 0,3$ $P_3^2 = 0,4$ $P_3^3 = 0,3$

$$k = 0,07 = 7\%$$

El valor capital medio de esta inversión será igual a:

$$\begin{aligned} \text{VCM} = & - 12.834,32 \times 1 + \frac{12.000 \times 0,5 + 18.000 \times 0,5}{(1,07)} + \\ & + \frac{10.000 \times 0,5 + 14.000 \times 0,5}{(1,07)^2} + \frac{5.000 \times 0,3 + 7.000 \times 0,4 + 13.000 \times 0,3}{(1,07)^3} = \\ & = 18.359,02, \end{aligned}$$

y, por lo tanto, la inversión conviene llevarla a cabo.

La tasa de retorno vendrá definida por la ecuación:

$$\text{VCM} = -12.834,32 \times 1 + \frac{12.000 \times 0,5 + 18.000 \times 0,5}{(1 + r_m)} +$$

.../...

$$+ \frac{10.000 \times 0,5 + 14.000 \times 0,5}{(1 + r_m)^2} + \frac{5.000 \times 0,3 + 7.000 \times 0,4 + 13.000 \times 0,3}{(1 + r_m)^3} = 0$$

en donde, r es igual al 0,20, que como es superior al 0,07, la inversión es conveniente.

AJUSTE DE LA TASA DE DESCUENTO

Una de las formas más sencillas de introducir el riesgo en los modelos clásicos de selección de inversiones, es la que consiste en ajustar al tipo de actualización o descuento.

Al tratarse de proyectos con riesgos, la tasa de descuento habrá que incrementarla convenientemente, en función del riesgo de la inversión. Por ejemplo, supongamos el caso de un proyecto que entraña un mayor riesgo del normal. Si una tasa de descuento del 10 por 100 se considera aceptable para proyectos sin riesgo, dicha tasa "pura" habrá que suplementarla ahora convenientemente, por ejemplo en un 5 por 100, para homogeneizar el valor capital, y evitar que la decisión de inversión basada en dicho criterio sea errónea. Lógicamente, para los proyectos con mayor riesgo, el empresario exigirá un mayor valor capital.

La nueva tasa de descuento ajustada al riesgo será:

.../...

$$(4.10) \quad s = k + p$$

en donde, k es la tasa de descuento "pura", y p la primera por el riesgo.

La nueva fórmula del valor capital será:

$$(4.11) \quad VC = -A + \frac{Q_1}{(1+s)} + \frac{Q_2}{(1+s)^2} + \dots + \frac{Q_n}{(1+s)^n}$$

Sea la inversión definida por los siguientes flujos de caja:

TABLA 2

Momento 0	Año 1	Año 2	Año 3
3.200	1.500	1.500	1.500

$$k = 0,10 = 10\%$$

El valor capital de esta inversión es:

$$VC = -3.200 + 1.500 a_{\overline{3}|0,10} = 530,32$$

que, como es positivo, la inversión interesa llevarla a cabo.

Sin embargo, si el director del servicio de inversiones de esta empresa estima que la inversión lleva aparejados unos riesgos

.../...

bastante superiores a los normales, no se conformará con un tipo de descuento del 10 por 100 y aplicará una tasa mayor, por ejemplo del 20 por 100.

Para este nuevo tipo de descuento, el valor capital es:

$$VC = -3.200 + 1.500 a_{\overline{3}|0,20} = -40,29$$

lo que nos indica que el proyecto no conviene llevarlo a cabo.

Si se utilizase el criterio de la tasa de retorno, en vez del valor capital, se procedería de igual modo. Una vez que se haya obtenido el tipo de rendimiento interno r , se comparará con el tipo de actualización s ajustado al riesgo. La inversión intere será llevarla a cabo sólo cuando r sea mayor que s .

La dificultad principal de este método se halla en determinar la prima de riesgo p , en que debemos suplementar la tasa "pura" de descuento en función del riesgo inherente al proyecto. Se trata de algo subjetivo que dependerá de la apreciación personal del inversor y por lo tanto llevará siempre aparejado un elevado margen de arbitrariedad. Algunas empresas suelen agrupar las alternativas de inversión en clases de riesgo. A los proyectos de primera clase (es decir, de más elevado riesgo) se

.../...

le aplicará, por ejemplo, una tasa de descuento del 30 por 100 , a los de segunda clase un 20 por 100, a los de tercera un 15 por 100, etc. Sin embargo, tanto la clasificación de los proyectos , como la determinación de la tasa de descuento apropiada, siguen presentando un elevado margen de arbitrariedad.

LA REDUCCION DE LOS FLUJOS DE CAJA A CONDICIONES DE CERTEZA

Un procedimiento alternativo del anterior para introducir el — riesgo en los modelos clásicos de valoración y selección de proyectos de inversión, consiste en ajustar en función del riesgo - los flujos netos de caja esperados. El flujo neto de caja del pe ríodo t , se multiplica por un coeficiente a_t comprendido entre - cero y la unidad, cuyo valor dependerá del grado de riesgo inhe- rente al flujo de caja de ese período, y que se especificará de tal forma que a la gerencia de la empresa le sea indiferente per- cibir Q_t al final del año t en condiciones de riesgo, que perci- bir $a_t \cdot Q_t$ en condiciones de certeza en esa misma fecha. El coefi- ciente a_t variará, por lo tanto, de forma inversamente proporci- nal al grado de riesgo del flujo neto de caja futuro. Cuanto ma- yor sea el riesgo de Q_t , menos vale dicho flujo de dinero para - el inversor, y por ello menor tendrá que ser el coeficiente a_t .— Se verificará pues la siguiente relación:

.../...

$$(4.12) \quad a_t = \frac{\text{Flujo de caja cierto en } t \cdot Q_t'}{\text{Flujo de caja incierto en } t \cdot Q_t} = \frac{\alpha_1 \cdot Q_t}{Q_t} = \alpha_t$$

El valor capital de la inversión se expresará ahora así:

$$(4.13) \quad VC = -A + \frac{\alpha_1 Q_1}{(1+K)} + \frac{\alpha_2 Q_2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{\alpha_n Q_n}{(1+k)^n}$$

La ecuación que define la tasa de retorno será ahora:

$$(4.14) \quad VC = -A + \frac{\alpha_1 Q_1}{(1+r)} + \frac{\alpha_2 Q_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{\alpha_n Q_n}{(1+r)^n} = 0$$

La inversión interesará realizarla siempre que VC sea positivo, o que r sea mayor que K.

Veamos, por ejemplo, una inversión consistente en la realización de una campaña de exploración a la búsqueda de un determinado mineral, en la que se llevan dos años prospecciones sin el resultado previsto. Se realiza ahora una nueva campaña de 10 millones de u.m. esperando que resulte de ello un hallazgo de un yacimiento capaz de incrementar los ingresos de la compañía en 4 millones durante 5 años. Los costes fijos de la empresa continúan — siendo los mismos sin embargo los costes variables (nuevo perso-

.../...

nal contratado) se estiman en 500.000 u.m. anuales. Suponemos que tanto los gastos como los ingresos se realiza al contado.

El riesgo del flujo neto de caja anual de 3.500.000 pesetas — (=4.000.000 - 500.000) es mayor en los últimos años que en los primeros, siendo los coeficientes de ajuste: $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 0,9$; $\alpha_3 = 0,8$; $\alpha_4 = 0,6$ y $\alpha_5 = 0,4$. Si la tasa de actualización libre de riesgo es del 7 por 100, ¿interesa o no llevar a cabo la campaña de exploración?

$$V = -10.000.000 + 3.500.000 a_{\overline{5}|0,07} = 4.350.665$$

y la inversión interesa llevarla a cabo.

El valor capital de la inversión, una vez ajustado los flujos de caja, será ahora:

$$\begin{aligned} V &= -10.000.000 + \frac{1 \times 3.500.000}{(1,07)} + \frac{0,9 \times 3.500.000}{(1,07)^2} + \\ &+ \frac{0,8 \times 3.500.000}{(1,07)^3} + \frac{0,6 \times 3.500.000}{(1,07)^4} + \frac{0,4 \times 3.500.000}{(1,07)^5} = \\ &= 908.152,5 \end{aligned}$$

y la inversión también conviene llevarla a cabo, pero ahora es mucho menos interesante.

.../...

El principal inconveniente de este método se halla en la dificultad de especificar los coeficientes de ajuste para los flujos de caja futuros. Su determinación es tan arbitraria como la especificación de la tasa de descuento ajustada al riesgo en el método anterior. En cualquier caso, la gerencia de la empresa, apoyándose en su intuición, en su experiencia y en sus conocimientos, -- siempre podrá especificar esos coeficientes de ponderación, al igual que también puede especificar -con mayor o menor precisión- las probabilidades "subjetivas" o "a priori".

LA COMPARACION DE AMBOS METODOS

Los dos métodos que acabamos de estudiar entrañan un elevado margen de subjetividad, por lo que han sido bastante criticados. En un principio ambos métodos parecen equivalentes. Los dos permiten afrontar el mismo problema, y los dos encierran un alto grado de arbitrariedad. Sin embargo, Robichek y Myers defienden la superioridad teórica del segundo método con relación al primero. La hipótesis de constancia de la tasa de descuento ajustada al riesgo, implica que los coeficientes de reducción a condiciones de certeza sean decrecientes, lo que no siempre concuerda con la realidad. En efecto, si el método de ajuste de la tasa de descuento fuese equivalente al método de reducción a condiciones de

certeza, debería conducir a los mismos resultados; es decir, para el período t deberá verificarse:

$$\frac{\alpha_t Q_t}{(1+k)^t} = \frac{Q_t}{(1+s)^t} \quad (4.15.)$$

En otras palabras, el valor actual de un flujo de caja reducido a condiciones de certeza y descontado a la tasa de descuento libre de riesgo, debe ser igual al valor actual de dicho flujo de caja descontado a una tasa ajustada al riesgo.

A partir de (4.15) obtenemos:

$$\alpha_t = \frac{(1+k)^t}{(1+s)^t} \quad (4.16.)$$

De igual forma, para el período $t + 1$ tendríamos:

$$\alpha_{t+1} = \frac{(1+k)^{t+1}}{(1+s)^{t+1}} \quad (4.17.)$$

Como las tasas k y s son positivas y constantes, y dado que s es mayor que k , se sigue que: $\alpha_{t-1} > \alpha_t > \alpha_{t+1}$. Es decir, una tasa de actualización constante en el método de ajuste de la tasa de des

.../...

cuento, lleva implícita la presunción de que los coeficientes de reducción a condiciones de certeza son decrecientes. En el método de ajuste de la tasa de descuento se supone, pues, que el — riesgo de los flujos de caja más alejados es siempre mayor que el riesgo de los flujos de caja más próximos, y esto es cierto en muchos casos pero no siempre. En el caso del lanzamiento de un producto nuevo, por ejemplo, los flujos de caja de los primeros años suelen ser mucho más inciertos que los flujos de años posteriores; la reacción del mercado frente al producto nuevo en los primeros años, quizás nos marque la pauta de lo que van a -- ser los flujos de caja en los años siguientes. En las plantaciones forestales y en ciertos tipos de ganadería, la probabilidad de muerte (y por lo tanto el riesgo) de las plantas y animales es mayor en los primeros años. El método de reducción a condiciones de certeza es, por lo tanto, más flexible (adaptable a las situaciones reales) que el método de ajuste de la tasa de descuento, y por ello es teóricamente superior, en el sentido de Robichnek y Myers.

Nosotros, sin embargo, no nos atreveríamos a postular dicha — afirmación. Entendemos que la diferencia fundamental entre ambos métodos se halla en la contemplación del proyecto de inversión. El método de la tasa de descuento ajustada contempla el proyecto

.../...

globalmente, e incrementa la tasa de descuento con una prima que traduce el riesgo global de aquél. El método de reducción a condiciones de certeza contempla los flujos de caja de los distintos periodos aisladamente, y no al proyecto como un todo, y pondera a los flujos de caja con unos coeficientes que están relacionados inversamente con el grado de riesgo correspondiente. Los flujos de caja de los diferentes periodos, por otra parte, suelen estar correlacionados entre sí, lo que nos indica que el proyecto hay que contemplarlo globalmente como un todo unitario; es decir, como un "microsistema" en el que todas sus partes están relacionadas de algún modo. En este sentido, el método de la tasa de descuento ajustada al riesgo es teóricamente superior, al menos para nosotros.

4.4.2. Análisis de la sensibilidad de las decisiones de inversión.

Como se ha descrito en el punto anterior es normal que algunas o todas las magnitudes que definen una inversión sean variables aleatorias; en este caso, cobra especial interés un análisis de la sensibilidad de los resultados obtenidos, utilizando el criterio del valor capital, tasa de retorno, etc. Mediante este análisis se trata de ver la sensibilidad del resultado obtenido ante la variación de alguna de las magnitudes que definen la inver

.../...

sion (desembolso inicial, flujos netos de caja o tasa de actualización), y tener una idea -aproximada al menos- del grado de confianza de los resultados obtenidos.

El análisis de la sensibilidad se puede utilizar con éxito en cualquier modelo económico decisionista, con el objeto de determinar la sensibilidad (variabilidad) de los resultados obtenidos al variar alguno de los parámetros estimados. Aquellos parámetros a los que el resultado obtenido es más sensible, deben estimarse con una mayor precaución; por el contrario, aquellos parámetros que puedan variar dentro de un amplio intervalo sin que por ello varíe de forma significativa el resultado obtenido, pueden estimarse con un menor cuidado. El estudio de la sensibilidad de las decisiones de inversión constituye una forma -directa desde luego- de introducir el riesgo en el análisis de inversiones, dado que las magnitudes fundamentales que definen a una inversión ya no son consideradas como ciertas, lo que nos obliga a tomar los resultados obtenidos en base a ellas con cierta cautela.

LA SENSIBILIDAD DE LA DECISION OPTIMA ADOPTADA EN BASE AL CRITERIO DEL VALOR CAPITAL

Una inversión conviene llevarla a cabo según el criterio del va

lor capital, cuando éste es positivo. El valor capital de una inversión en el caso general, viene dado como se sabe por la expresión:

$$(4.18) \quad VC = -A \frac{Q_1}{(1+k)} + \frac{Q_2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{Q_n}{(1+k)^n}$$

Las magnitudes que definen el valor capital son A , Q_j ($j = 1, 2, \dots, n$) y k , que se necesitan estimar en el momento de decidir la conveniencia o no conveniencia de la inversión. Como en toda predicción, los valores reales pueden diferir de los valores estimados, y la decisión considerada como óptima tomando como base los valores esperados puede resultar errónea. La decisión consistente en "aceptar" la inversión puede no ser la óptima, cuando el valor capital ex-post es nulo o negativo; por el contrario, la decisión consistente en "no aceptar" la inversión, no será óptima cuando el valor capital ex-post sea positivo. La decisión de "aceptar" o "no aceptar" una inversión, que siempre tiene que adaptarse tomando como base valores estimados, encierra por lo tanto un cierto grado de riesgo, que es debido al posible fallo en las predicciones.

Ahora bien, la variación de cada una de las magnitudes no afecta en igual medida al valor capital. Por ello, debemos preguntarnos: ¿Dentro de qué intervalo puede variar cada una de las distintas magnitudes sin que el valor capital cambie de sentido? .

.../...

En forma equivalente, y en el supuesto de que el valor capital - esperado sea positivo (es decir, la decisión óptima es "aceptar" la inversión), podemos preguntarnos: ¿dentro de qué intervalo -- puede variar cada una de las magnitudes para que el valor capi-- tal siga siendo positivo? La respuesta a esta pregunta constituye el objetivo del presente punto.

El ejemplo siguiente lo hacemos bajo la cláusula ceteris-paribus, es decir, cuando una magnitud varía se da por supuesto que el -- resto permanece constante.

Veremos un análisis de sensibilidad del valor capital. Sea una - inversión definida por los siguientes flujos de caja:

T A B L A 3

Desembolso inicial	Flujos de caja		
	Año 1	Año 2	Año 3
A= 20.000	Q ₁ = 10.000	Q ₂ = 6.000	Q ₃ = 12.000

El valor capital de esta inversión será igual a:

$$V = -20.000 + \frac{10.000}{(1,06)} + \frac{6.000}{(1,06)^2} + \frac{12.000}{(1,06)^3} = 4.879,06 \quad (4.19.)$$

.../...

que, como es positivo, la inversión interesa realizarla

VARIACION DE A

A partir de (4.18.) podemos observar que VC siga siendo positivo, el valor A tendrá que verificar:

$$A < \frac{Q_1}{(1+k)} + \frac{Q_2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{Q_n}{(1+k)^n} \quad (4.20.)$$

Sustituyendo en nuestro ejemplo tenemos que:

$$A < \frac{10.000}{(1,06)} + \frac{6.000}{(1,06)^2} + \frac{12.000}{(1,06)^3} = 24.879,05$$

luego, la decisión consistente en aceptar la inversión (frente a la de no aceptarla) seguirá siendo la óptima aunque A varíe, siempre que lo haga dentro del intervalo (0; 24.879,05)*.

* Teóricamente el intervalo $(-\infty; 24.879,05)$, pero A (desembolso inicial) en inversiones normales nunca es negativo. Puede existir, sin embargo, alguna inversión (desde luego "no simple") en que A tome un valor negativo, y entonces el intervalo sería efectivamente $(-\infty; 24.879,05)$.

VARIACION DE Q_j

Al variar Q_j , para que VC siga siendo positivo tendrá que verificarse -manipulando en (2.1)- la siguiente relación:

$$Q_j > \left[A - \frac{Q_1}{(1+k)} - \frac{Q_2}{(1+k)^2} - \dots - \frac{Q_{j-1}}{(1+k)^{j-1}} - \frac{Q_{j+1}}{(1+k)^{j+1}} - \dots - \frac{Q_n}{(1+k)^n} \right] (1+k)^j \quad (4.21.)$$

Aplicando la relación anterior a nuestro ejemplo, y para $j=2$, - resulta que:

$$Q_2 > \left[20.000 - \frac{10.000}{(1,06)} - \frac{12.000}{(1,06)^3} \right] (1,06)^2 = 551,24$$

Esto nos indica que la decisión consistente en aceptar la inversión sigue siendo la óptima aunque Q_2 varíe, siempre que lo haga dentro del intervalo $(551,24; \infty)$. De la misma forma podríamos -- analizar la sensibilidad de la decisión óptima con relación a -- las variaciones de Q_1 y Q_3 .

VARIACION DE k

Como VC es una función decreciente de k, la tasa de actualización que anule a (4.19) será la tasa fronteriza entre "aceptar" y "no aceptar". Cuando k supere dicha tasa fronteriza, la decisión consistente en aceptar la inversión deja de ser la óptima.

En nuestro ejemplo la tasa fronteriza vendrá dada por la ecuación:

$$VC = -20.000 + \frac{10.000}{(1+k)} + \frac{6.000}{(1+k)^2} + \frac{12.000}{(1+k)^3} = 0$$

de donde: $k=0,18=18\%$

Por lo tanto, mientras k se mantenga dentro del intervalo (0; 0,18), la decisión consistente en aceptar la inversión sigue siendo la óptima.

LA SENSIBILIDAD DEL ORDEN DE PREFERENCIA CUANDO SE UTILIZA COMO CRITERIO DE DECISION EL VALOR CAPITAL

Cuando tenemos un conjunto de alternativas de inversión ordenadas, según el criterio del valor capital, de mayor a menor preferencia, puede interesar analizar la sensibilidad del orden inicialmente establecido ante la variación de algunas de las magnitudes que definen las distintas inversiones.

.../...

La comparación debemos establecerla ahora, no con relación a un valor capital "nulo", como hemos hecho en la sección anterior, si no con relación al valor capital de la inversión siguiente. Una inversión desciende en el orden de la lista cuando su valor capital desciende por debajo del valor capital de las inversiones si guientes. La inversión primaria pasará al segundo lugar cuando - su valor capital descienda por debajo del de la segunda (que - pasará a ocupar el primer lugar de la lista) y siga siendo supe rior al de la tercera. La inversión segunda, pasará a ocupar el cuarto lugar cuando su valor capital descienda por debajo de la tercera, ésta pasará a ocupar el tercer lugar y la inversión ter cera pasará al segundo, etc.

LA SENSIBILIDAD DE LA DECISION OPTIMA ADOPTADA EN BASE A LA TASA DE RETORNO

La tasa de retorno es, como se sabe, aquel tipo de actualización que anula el valor capital; es decir, es aquel valor de r que ve rifica la siguiente ecuación:

$$V(r) = -A + \frac{Q_1}{(1+r)} + \frac{Q_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{Q_n}{(1+r)^n} = 0$$

(4.22)

.../...

La inversión interesará llevarla a cabo cuando r sea mayor que k , siendo k el tipo de rendimiento exigido (coste del capital) o -- "suelo" mínimo de rentabilidad. Ahora bien, al igual que ocurre con el valor capital, la tasa de retorno es calculada en base a unos valores estimados de A y Q_j ($j = 1, 2, \dots, n$), y el valor real que en el futuro van a tomar dichas magnitudes puede coincidir o no -como es lógico- con los valores previstos. La desviación en más o en menos de A y Q_j con relación a los valores previstos afectará al valor de r en diferente proporción. ¿Cuál es pues el efecto de esas desviaciones sobre el valor r y, por ende, sobre la decisión de inversión?.

El análisis de la sensibilidad de la decisión de inversión lo vamos a ilustrar con un ejemplo. Sea una inversión definida por -- los siguientes flujos de caja:

TABLA 4

Desembolso Inicial	Flujos de caja		
	Año 1	Año 2	Año 3
$A = 8.000$	$Q_1 = 4.000$	$Q_2 = 5.000$	$Q_3 = 4.000$

$$k = 0,10 = 10\%$$

La tasa de retorno vendrá definida por la ecuación:

.../...

$$V(r) = - 8.000 + \frac{4.000}{(1+r)} + \frac{5.000}{(1+r)^2} + \frac{4.000}{(1+r)^3} = 0$$

en donde, $r = 0,28 = 28$ por 100, que, como es superior al 10 por 100, la inversión interesa llevarla a cabo.

VARIACION DE A

Al variar A, la inversión dejará de interesar cuando r descienda por debajo de k. El valor máximo que puede contar A, para que la inversión siga siendo interesante, como se deduce de (4.1) será aquel que verifique la ecuación:

$$A = \frac{Q_1}{(1+k)} + \frac{Q_2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{Q_n}{(1+k)^n} \quad (4.23.)$$

En nuestro ejemplo tendremos que:

$$A = \frac{4.000}{(1,10)} + \frac{5.000}{(1,10)^2} + \frac{4.000}{(1,10)^3} = 10.773,85$$

Lo que nos indica que mientras A se mantenga dentro del intervalo (0, 10.773,85), la decisión consistente en aceptar la inversión sigue siendo la óptima.

VARIACION DE Q_j

Como puede observarse en (4.1.), al aumentar Q_j (en el supuesto de que sea positiva) la tasa de retorno también aumentará. El menor valor que puede tomar Q_j para que la inversión siga interesando (es decir, $r \geq k$), se obtendrá despejando de (4.22.) y será:

$$Q_j \geq \left[A - \frac{Q_1}{(1+k)} - \frac{Q_2}{(1+k)^2} - \dots - \frac{Q_{j-1}}{(1+k)^{j-1}} - \frac{Q_{j+1}}{(1+k)^{j+1}} - \dots - \frac{Q_n}{(1+k)^n} \right] (1+k)^j \quad (4.24.)$$

En el ejemplo que estamos estudiando, y para $j = 2$, el menor valor que puede tomar Q_2 para que la inversión no deje de ser interesante, sera:

$$Q_2 = \left[8.000 - \frac{4.000}{(1,10)} - \frac{4.000}{(1,10)^3} \right] (1,10)^2 = 1.643,63$$

Por lo tanto, mientras Q_2 se mantenga dentro del intervalo $(1.643,62; \infty)$, la decisión consistente en aceptar la inversión sigue siendo la óptima.

VARIACION DE k

La inversión seguirá interesando mientras r sea mayor o igual que k . El mayor valor que puede tomar k será aquel que verifique la ecuación. Por lo tanto, mientras k se mantenga dentro del intervalo $(0; 0,28)$, la decisión en aceptar la inversión sigue siendo la óptima.

LA SENSIBILIDAD DEL ORDEN DE PREFERENCIA CUANDO SE UTILIZA COMO CRITERIO DE DECISION LA TASA DE RETORNO

Las inversiones aparecerán ordenadas de mayor a menor tasa de retorno, y la comparación se establecerá no con relación a k (coste del capital) sino con relación a la tasa de retorno de la inversión siguiente.

Para que el orden de preferencia siga siendo el mismo, habrá que estudiar la sensibilidad de aquella inversión cuyas magnitudes varían con relación a la inversión anterior y a la siguiente. De esta forma, obtendremos para cada una de las magnitudes: A , Q_j y k unos intervalos de variación, dentro de los cuales la inversión se mantendrá en el mismo lugar de la lista.

UN CASO EN EL QUE LOS FLUJOS DE CAJA SE CONOCEN EN TERMINOS DE PROBABILIDAD

Supongamos el caso de una empresa minera que quiera llevar a cabo un proyecto de inversión consistente en la obtención de un nuevo concentrado, el desarrollo inicial puede tomar los siguientes valores con las probabilidades que se indican en la tabla 5.

La vida del nuevo concentrado se estima en 5 años. Existe una verosimilitud del 60 por 100 de que las ventas anuales asciendan a 100.000 unidades y que se mantengan constantes a lo largo de todo el período, un 20 por 100 de que desciendan en 10.000 unidades cada año, y un 20 por 100 de que aumenten en la misma proporción. El precio de venta del producto es de 80 pesetas. Los costes de operación anuales se estiman en el 30 por 100 de la cifra de negocios o valor de las ventas. Tanto las ventas como los gastos se supone que se efectúan al contado.

Con los datos que anteceden podemos calcular los flujos de caja anuales correspondientes a dicha inversión -que se obtendrán -- por diferencia entre los ingresos y pagos- en cada una de las tres hipótesis de demanda. Los resultados obtenidos se recogen en las tablas siguientes números 6, 7 y 8.

CALCULO DEL VALOR CAPITAL PARA CADA UNA DE LAS DISTINTAS POSIBILIDADES.

Siguiendo el procedimiento ya conocido, y utilizando un tipo de

TABLA 5

<i>Desembolso inicial (millones de pesetas)</i>	<i>Probabilidades</i>
2	0,10
3	0,15
4	0,25
5	0,25
6	0,15
7	0,10
	1,00

TABLA 6

Hipótesis pesimistas (0,20)

<i>Desembolso inicial (en millones de pesetas)</i>	<i>Flujos de caja (en millones de pesetas)</i>				
	<i>Año 1</i>	<i>Año 2</i>	<i>Año 3</i>	<i>Año 4</i>	<i>Año 5</i>
2 (0,10)	5,6	5,04	4,48	3,92	3,36
3 (0,15)	5,6	5,04	4,48	3,92	3,36
4 (0,25)	5,6	5,04	4,48	3,92	3,36
5 (0,25)	5,6	5,04	4,48	3,92	3,36
6 (0,15)	5,6	5,04	4,48	3,92	3,36
7 (0,10)	5,6	5,04	4,48	3,92	3,36

TABLA 7
Hipótesis más probable (0,60)

Desembolso inicial (en millones de pesetas)	Flujos de caja (en millones de pesetas)				
	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
2 (0,10)	5,6	5,6	5,6	5,6	5,6
3 (0,15)	5,6	5,6	5,6	5,6	5,6
4 (0,25)	5,6	5,6	5,6	5,6	5,6
5 (0,25)	5,6	5,6	5,6	5,6	5,6
6 (0,15)	5,6	5,6	5,6	5,6	5,6
7 (0,10)	5,6	5,6	5,6	5,6	5,6

TABLA 8

Hipótesis optimista (0,20)

Desembolso inicial (en millones de pesetas)	Flujos de caja (en millones de pesetas)				
	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
2 (0,10)	5,6	6,16	6,72	7,28	7,84
3 (0,15)	5,6	6,16	6,72	7,28	7,84
4 (0,25)	5,6	6,16	6,72	7,28	7,84
5 (0,25)	5,6	6,16	6,72	7,28	7,84
6 (0,15)	5,6	6,16	6,72	7,28	7,84
7 (0,10)	5,6	6,16	6,72	7,28	7,84

actualización del 7 por 100, calculamos el valor capital para cada una de las 18 alternativas. En la tabla siguiente recoge mos los resultados y las probabilidades respectivas. Para cal cular las probabilidades suponemos que el desembolso inicial es independiente de la acogida del producto en el mercado; es decir, se trata de sucesos estadísticamente independientes. - Por ello, la probabilidad del suceso conjunto será igual al - producto de las probabilidades de cada uno de los sucesos. -- Así, por ejemplo, la probabilidad de que se dé el desembolso inicial de cuatro millones y la hipótesis pesimista será — igual a $0,25 \times 0,20=0,05$; la probabilidad de que se dé el de- desembolso inicial de dos millones y la hipótesis más probable- será igual a $0,10 \times 0,60=0,06$, etc. En el caso de que exista dependencia estadística entre las dos variables (coste ini— cial y ventas), el cálculo de las probabilidades conjuntas se rá mucho más complejo. (ver tabla 9).

DETERMINACION DEL GRADO DE CONFIANZA DEL VALOR CAPITAL

Las decisiones de inversión según los criterios clásicos se - presentan de forma dicotómica "aceptar" o "no aceptar" la in- versión. La decisión de "aceptar" será la óptima si el valor capital de la inversión correspondiente es positivo, y vice--

.../...

TABLA 9

<i>Desembolso inicial (en millones de pesetas)</i>	<i>Valor capital (en millones de pesetas)</i>		
	<i>Hipótesis optimista (0,20)</i>	<i>Hipótesis más probable (0,60)</i>	<i>Hipótesis pesimista (0,20)</i>
2 (0,10)	25,22 (0,02)	20,96 (0,06)	16,66 (0,02)
3 (0,15)	24,22 (0,03)	19,96 (0,09)	15,66 (0,03)
4 (0,25)	23,22 (0,05)	18,96 (0,15)	14,66 (0,05)
5 (0,25)	22,22 (0,05)	17,96 (0,15)	13,66 (0,05)
6 (0,15)	21,22 (0,03)	16,96 (0,09)	12,66 (0,03)
7 (0,10)	20,22 (0,02)	15,96 (0,06)	11,66 (0,02)

versa. Analizando la tabla (9) de la sección anterior, observamos que en las dieciocho situaciones que pueden presentarse el valor capital es positivo, lo que no indica que tenemos la certeza de que la decisión consistente en "aceptar" la inversión es la correcta: es decir, el grado de confianza de que el valor capital sea positivo es del 100 por 100. El grado de confianza o probabilidad de que el valor capital sea superior a -24 millones de pesetas es del 5 por 100 ($=0,02+0,03=0,05=5\%$), pues sólo existen dos posibilidades -entre las dieciocho que pueden presentarse- de que el valor capital sea superior a esa cifra. La probabilidad de que el valor capital sea superior a 20 millones es del 26 por 100 ($=0,02+0,03+0,05+0,05+0,03+0,02+0,06=0,26=26\%$). La probabilidad de que el valor capital sea inferior a 15 millones de pesetas es del 15 por 100 ($=0,05+0,05+0,03+0,02$). La probabilidad de que el valor esté comprendido entre 18 y 22 millones de pesetas es del 35 por 100 ($=0,15+0,09+0,06+0,02+0,03=0,35=35\%$), etc.

De esta forma, hemos calculado la sensibilidad del valor capital (y por lo tanto también de la decisión de inversión) cifra da en términos de probabilidad con relación al desembolso inicial y al nivel de demanda; es decir, con relación a la variación de los flujos netos de caja de la inversión. Este análisis

como puede comprobarse, es más preciso que el efectuado en el capítulo anterior.

CALCULO DE LA TASA DE RETORNO PARA CADA UNA DE LAS DISTINTAS - POSIBILIDADES

Utilizando la fórmula correspondiente, vamos a calcular ahora la tasa de retorno para cada una de las 18 posibilidades. Los resultados obtenidos* son los siguientes:

$$r = \frac{-A + \sum_{i=1}^n Q_i}{\sum_{i=1}^n iQ_i}$$

(Ver tabla 10)

DETERMINACION DEL GRADO DE CONFIANZA DE LA TASA DE RETORNO

El análisis que hemos efectuado anteriormente con relación al valor capital, podemos realizarlo ahora para la tasa de retorno. En la tabla 10 de la sección anterior podemos observar que una tasa de retorno superior al 30 por 100 sólo tiene una

* Por comodidad, para el cálculo de las tasas de retorno se ha utilizado la fórmula simplificada de Schneider.

TABLA 10

Desembolso inicial (en millones de Ptas)	TASA DE RETORNO		
	Hipótesis pesimistas (0,20)	Hipótesis probable (0,60)	Hipótesis optimista (0,20)
2 (0,10)	0,33 (0,02)	0,30 (0,06)	0,29 (0,02)
3 (0,15)	0,31 (0,03)	0,29 (0,09)	0,28 (0,03)
4 (0,25)	0,29 (0,05)	0,28 (0,15)	0,27 (0,05)
5 (0,25)	0,28 (0,05)	0,27 (0,15)	0,26 (0,05)
6 (0,15)	0,26 (0,03)	0,26 (0,09)	0,25 (0,03)
7 (0,10)	0,25 (0,02)	0,25 (0,06)	0,24 (0,02)

probabilidad del 5 por 100 ($=0,02+0,03=0,05=5\%$). El grado de --
confianza o probabilidad de que la tasa de retorno se halle com-
prendida entre el 29 y el 30 por 100 (ambas inclusive) es igual
al 22 por 100 ($=0,05+0,06+0,09+0,02=0,22=22\%$). La probabilidad-
de que la tasa de retorno sea inferior al 26 por 100 es del 13
por 100 ($=0,02+0,06+0,03+0,02=0,13=13\%$), etc.

Mediante este análisis podemos observar la sensibilidad de la -
tasa de retorno y, por lo tanto, la sensibilidad de la deci-
sión de la inversión adoptada siguiendo éste criterio. Suponga-
mos, por ejemplo, que para esta inversión la tasa de retorno re-
querida es del 26 por 100. La decisión consistente en aceptar -
la inversión será óptima cuando la tasa de retorno sea superior
o igual a dicho tanto por ciento, lo que tiene una probabilidad
del 87 por 100; mientras que dicha decisión no será óptima cuan-
do la tasa de retorno sea inferior al 26 por 100, lo que tiene
una probabilidad de ocurrencia del 13 por 100 ($=0,02+0,06+0,03+
+0,02=0,13=13\%$).

4.4.3. La adopción de decisiones de inversión en base al valor
medio y a la varianza de valor capital y de la tasa de -
retorno.

La elección de aquellas inversiones con unas esperanzas de va-

lor capital (o tasa de retorno) mayores constituye, como también hemos visto, una línea de conducta racional. Ahora bien, el empresario no debe conformarse solamente con el conocimiento de la esperanza matemática de valor capital (o de la tasa de retorno) para la adopción de la decisión inversión. Dos inversiones por el mismo valor capital (o tasa de retorno) pueden no ser indiferentes para el inversor, debido precisamente al distinto grado de riesgo. El riesgo de un proyecto de inversión viene definido por la variabilidad de sus flujos de caja, y se suele convenir en tomar como medida del mismo la varianza del valor capital.

El inversor tiene que moverse entre dos fuerzas de sentido opuesto: intentar maximizar la esperanza matemática de ganancias y al mismo tiempo tratar de minimizar la varianza o riesgo de la inversión. Pero ocurre que generalmente las inversiones más variables son las más arriesgadas, o viceversa. La conducta racional del inversor consistirá en escoger entre las inversiones de igual valor capital (o tasa de retorno) aquellas que tengan una varianza menor ; o lo que es equivalente, en elegir entre las inversiones que tenga igual varianza aquellas que tengan un valor capital (o tasa de retorno) medio mayor.

El valor capital(o tasa de retorno) de una inversión, calculado

en base a los flujos de caja medios (!o más probables!), debe ir acompañado de la varianza. El valor de éste parámetro le advertirá al inversor del riesgo que lleva implícito la decisión de inversión, y entre las inversiones con igual valor capital (o tasa de retorno) serán preferibles aquellas que tenga una menor varianza. Sin embargo, este comportamiento del inversor consiste en maximizar la esperanza matemática de ganancia y minimizar la varianza, nos lleva a introducir las curvas de preferencia del sujeto decisor (o de indiferencia entre riesgo y ganancia), que serán estudiadas más adelante. Un inversor puede preferir una inversión con un valor capital (o tasa de retorno) menor que otra inversión con un valor capital (o tasa de retorno) mayor, porque tiene también una varianza menor.

CALCULO DE LA ESPERANZA MATEMATICA DEL VALOR CAPITAL DE UNA INVERSION

El valor capital de una inversión, como se sabe, viene dado por la siguiente expresión:

$$VC = -A + \frac{Q_1}{(1+k)} + \frac{Q_2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{Q_n}{(1+k)^n} \quad (4.18.)$$

.../...

En el momento que las magnitudes A y Q_j son variables aleatorias con unas determinadas distribuciones de probabilidad, cada una de ellas tendrá su media y su varianza, que se podrán calcular utilizando la metodología apropiada que se estudia en Estadística Matemática. Pero lo que nos interesa en último término, es calcular la esperanza matemática y la varianza de la variable aleatoria VC (valor capital), con el objetivo de que en base al valor de dichos parámetros se pueda decidir la conveniencia o no de la inversión. Además, una vez que se conozcan tales parámetros se podrán hacer hipótesis acerca de la ley de probabilidad de VC y se podrá determinar la probabilidad de que VC sea superior o inferior a un determinado valor, que se habrá especificado previamente.

La esperanza matemática (o media teórica) de una suma de variables aleatorias, sean estas dependientes o independientes, es siempre igual a la suma de las esperanzas matemáticas de cada una de dichas variables, es decir:

$$E(VC) = -E(A) + \frac{1}{(1+k)} \cdot E(Q_1) + \frac{1}{(1+k)^2} \cdot E(Q_2) + \dots + \frac{1}{(1+k)^n} \cdot E(Q_n) = -E(A) + \sum_{t=1}^n \frac{E(Q_t)}{(1+k)^t} \quad (4.25.)$$

.../...

en donde:

$$E(A) = \sum_{r=1}^h A_0^r P_0^r \quad (4.26.)$$

$$E(Q_j) = \sum_{r=1}^h Q_t^r P_t^r \quad (4.27.)$$

A_0^r = Posible valor que puede tomar el desembolso inicial ($r = 1, 2, \dots, h$).

P_0^r = Probabilidad de ocurrencia de A_0^r .

Q_0^r = Posible valor que puede tomar el flujo de caja en el momento t ($r = 1, 2, \dots, h; t = 1, 2, \dots, n$).

P_t^r = Probabilidad de ocurrencia de Q_t^r .

Cuando el desembolso inicial, o alguno de los flujos de caja, es una magnitud perfectamente conocida (y no una variable aleatoria), ya se sabe que su esperanza matemática es idéntica a su valor y que su varianza es nula. En realidad, solo tiene sentido hablar de esperanza matemática y de varianza de una variable aleatoria. Sin embargo, al determinar la esperanza matemática (o la varianza) de VC, puede ocurrir que no todos los sumandos sean variables estocásticas, y unos pueden conocerse con exactitud mientras que otros solo es posible conocerlos en términos de probabilidad.

Ejemplo.- El desembolso inicial de una determinada inversión así como sus flujos de caja no se pueden conocer con exactitud, pero si es posible conocerlos en términos de probabilidad. Los posibles valores de dichas magnitudes y sus probabilidades se recogen en la tabla 11.

Aplicando las fórmulas (4.26) y (4.27) tenemos que:

$$E(A) = 40.000 \times 0,10 + 42.000 \times 0,15 + 44.000 \times 0,25 + 46.000 \times 0,25 + 48.000 \times 0,15 + 50.000 \times 0,10 = 45.000$$

$$E(Q_1) = 10.000 \times 0,05 + 12.000 \times 0,10 + 14.000 \times 0,35 + 16.000 \times 0,35 + 18.000 \times 0,10 + 20.000 \times 0,05 = 15.000$$

$$E(Q_2) = 18.000 \times 0,10 + 20.000 \times 0,17 + 22.000 \times 0,23 + 24.000 \times 0,23 + 26.000 \times 0,17 + 28.000 \times 0,10 = 23.000$$

$$E(Q_3) = 25.000 \times 0,03 + 28.000 \times 0,17 + 31.000 \times 0,30 + 34.000 \times 0,30 + 37.000 \times 0,17 + 40.000 \times 0,03 = 32.500$$

Si hacemos uso de la fórmula (4.24), el valor capital medio será:

$$E(VX) = -45.000 + \frac{15.000}{(1,07)} + \frac{23.000}{(1,07)^2} + \frac{32.500}{(1,07)^3} = 15.638$$

.../...

TABLA 11

<i>Momento actual</i>		<i>Año 1</i>		<i>Año 2</i>		<i>Año 3</i>	
<i>Valores de A</i>	<i>Probabilidades</i>	<i>Valores de Q₁</i>	<i>Probabilidades</i>	<i>Valores de Q₂</i>	<i>Probabilidades</i>	<i>Valores de Q₃</i>	<i>Probabilidades</i>
40.000	0,10	10.000	0,05	18.000	0,10	25.000	0,03
42.000	0,15	12.000	0,10	20.000	0,17	28.000	0,17
44.000	0,25	14.000	0,35	22.000	0,23	31.000	0,30
46.000	0,25	16.000	0,35	24.000	0,23	34.000	0,30
48.000	0,15	18.000	0,10	26.000	0,17	37.000	0,17
50.000	0,10	20.000	0,05	28.000	0,10	40.000	0,03
	<u>1,00</u>		<u>1,00</u>		<u>1,00</u>		<u>1,00</u>

$k = 0,07 = 7\%$

CALCULO DE LA VARIANZA DEL VALOR CAPITAL

La varianza de una variable aleatoria -como se sabe- es igual a la media aritmética ponderada de las desviaciones cuadráticas de dicha variable con respecto a su valor medio. Para un periodo de tiempo t, la varianza del flujo de caja correspondiente vendrá dada por:

$$\sigma^2(Q_t) = \sum_{r=1}^h (Q_t^r - E Q_t^r)^2 \cdot P_t^r \quad (4.28.)$$

donde:

Q_t^r = Flujo de caja de la posibilidad r en el período t.

P_t^r = Probabilidad de que ocurra Q_t^r .

$E [Q_t^r]$ = Esperanza matemática de Q_t^r .

La desviación típica (o estándar) es igual a la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma(Q_t) = \sqrt{\sum_{r=1}^h (Q_t^r - E Q_t^r)^2 \cdot P_t^r} \quad (4.29.)$$

El cálculo de la varianza del valor capital no está exento de dificultades. La varianza de una suma de variables aleatorias es -

.../...

igual a la suma de varianzas cuando tales variables son independientes; en el caso de que las variables sean dependientes habrá que tener en cuenta los momentos mixtos. La varianza de una constante es siempre igual a cero. La varianza de producto de una constante por una variable aleatoria es igual al cuadrado de esa misma constante por la varianza de la variable. La varianza de una suma de varias variables aleatorias independientes de distintos signos, es igual a la suma de las varianzas de dichas variables, pero todas ellas afectadas del signo positivo. La varianza del valor capital ha sido estudiada por F.S. Hillier con cierta originalidad. Este autor distingue tres casos:

- Los distintos flujos de caja son independientes
- Los flujos de caja están perfectamente correlacionados
- Una parte de los flujos de caja está perfectamente correlacionada mientras que otra parte es independiente. Se trata de una situación intermedia entre las dos anteriores.

Primer caso. Los flujos de caja son independientes.- Este es el caso más sencillo ya que cuando los flujos de caja son independientes, la varianza de VC es igual a la suma de las varianzas de los distintos flujos de caja, multiplicadas por el cuadrado de las constantes correspondientes. Es decir, partiendo de (4.24) tenemos que:

.../...

$$\sigma^2(\text{VC}) = \sigma^2(\text{A}) + \frac{1}{(1+k)^2} \cdot \sigma^2(Q_1) + \frac{1}{(1+k)^4} \cdot \sigma^2(Q_2) + \dots + \frac{1}{(1+k)^{2n}} \cdot \sigma^2(Q_n) \quad (4.30.)$$

Segundo caso. Los flujos de caja están perfectamente correlacionados.- Las variables Q_i y Q_j están perfectamente correlacionadas cuando su coeficiente de correlación es igual a la unidad, es decir:

$$\rho = \frac{\text{Cov}(Q_i, Q_j)}{\sigma(Q_i) \cdot \sigma(Q_j)} = \frac{\text{Cov}(Q_i, Q_j)}{\sigma(Q_i)} \cdot \frac{1}{\sigma(Q_j)} \quad (4.31.)$$

en donde, ρ es el coeficiente de correlación, $\text{Cov}(Q_i, Q_j)$ la covarianza entre Q_i y Q_j , y $\sigma(Q_i)$ y $\sigma(Q_j)$ las respectivas desviaciones típicas de Q_i y Q_j .

Partiendo de la fórmula (4.24), y utilizando la relación (4.31) la varianza de VC será:

$$\sigma^2(\text{VC}) = \sigma^2(\text{A}) + \frac{\sigma^2(Q_1)}{(1+k)^2} + \frac{\sigma^2(Q_2)}{(1+k)^4} + \dots + \frac{\sigma^2(Q_n)}{(1+k)^{2n}} + \frac{2}{(1+k)} \text{Cov}(A_1, Q_2) + \dots = \sigma^2(\text{A}) + \frac{\sigma^2(Q_1)}{(1+k)^2} + \frac{\sigma^2(Q_2)}{(1+k)^4} + \frac{\sigma^2(Q_n)}{(1+k)^{2n}} + \dots/\dots$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{(1+k)} \sigma(A) \cdot \sigma(Q_1) + \frac{2}{(1+k)^2} \sigma(A) \cdot \sigma(Q_2) + \dots = \left[\sigma(A) + \right. \\
 & \left. + \frac{\sigma(Q_1)}{(1+k)} + \frac{\sigma(Q_2)}{(1+k)^2} + \dots + \frac{\sigma(Q_n)}{(1+k)^n} \right]^2 \quad (4.32.)
 \end{aligned}$$

Tercer caso. Situación intermedia entre las dos anteriores.-Existen muy pocas inversiones cuyos flujos de caja sean completamente independientes o que estén perfectamente correlacionados. La mayor parte de las inversiones se hayan comprendidas entre esas dos situaciones extremas, que es el caso que vamos a estudiar -- ahora. En estas situaciones siempre queda el recurso de aplicar la fórmula general de la varianza de una suma de variables aleatorias. Sin embargo, supongamos casos simplificado en que el flujo de caja Q_t es posible subdividirlo en dos componentes:

$$Q_t = Q_t' + Q_t'' \quad (4.33.)$$

donde Q_t' es la parte de Q_t que varía independientemente, y Q_t'' la parte de Q_t que está perfectamente correlacionada con el Q'' de cualquier otro período.

El valor capital de la inversión vendrá dado entonces por la expresión:

.../...

$$\begin{aligned}
 VC = & -A' + \frac{Q_1'}{(1+k)} + \frac{Q_2'}{(1+k)^2} + \dots + \frac{Q_n'}{(1+k)^n} - A'' + \\
 & + \frac{Q_1''}{(1+k)} + \frac{Q_2''}{(1+k)^2} + \dots + \frac{Q_n''}{(1+k)^n}
 \end{aligned}
 \tag{4.34.}$$

Aplicando la fórmula (4.30) a los $n + 1$ primeros términos de la fórmula (4.38) a los $n + 1$ últimos, obtenemos la siguiente fórmula de la varianza de VC:

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 (VC) = & \sigma^2(A') + \frac{\sigma^2(Q_1')}{(1+k)^2} + \frac{\sigma^2(Q_2')}{(1+k)^4} + \dots + \frac{\sigma^2(Q_n')}{(1+k)^{2n}} + \\
 & + \left(\sigma^2(A'') + \frac{\sigma^2(Q_n'')}{(1+k)} + \frac{\sigma^2(Q_2'')}{(1+k)^2} + \dots + \frac{\sigma^2(Q_n'')}{(1+k)^n} \right)^2
 \end{aligned}
 \tag{4.35.}$$

Puede comprobarse que la fórmula (4.34.) anterior se reduce a la (4.30.) cuando los flujos de caja son independientes y se reduce a la (4.32) cuando los flujos de caja están perfectamente correlacionados. Se trata, por tanto, de una fórmula general que comprende las fórmulas (4.30.) y (4.32.) como pasos particulares.

EL COMPORTAMIENTO PROBABILISTICO DEL VALOR CAPITAL

La variable aleatoria VC (valor capital) es igual -como puede - observarse en (4.24.)- a la suma de varias variables aleatorias. En virtud del teorema central del límite, la suma de variables - aleatorias independientes tiende a la distribución normal, cuando el número de sumandos tiende a infinito. La convergencia de - este teorema límite es bastante rápido y por ello cuando el número de sumandos es igual o superior a 10 ya se puede utilizar la aproximación normal. Si el número de sumandos es inferior a 10 , o los flujos de caja de los distintos períodos no son independientes, ya no podemos fundamentar la hipótesis de normalidad en el teorema central del límite. La variable VC puede seguir cualquier ley de probabilidad, y para descubrirla habrá que hacer -- pruebas de adherencia, utilizando para ello alguno de los métodos que nos proporciona la Estadística Matemática (concretamente el test o prueba de la chi-cuadrada de Pearson). Como quiera que tales pruebas requieren un cierto nivel de información -de la - que a veces no se dispone- y laboriosos cálculos, es bastante -- frecuente que el analista de inversiones acepte la hipótesis de normalidad sin más. En tal caso, la ley de probabilidad de VC - presentaría el siguiente desenvolvimiento (la famosa campana de Gauss).

.../...

La variable normal ($E [VC]$, $\sigma (VC)$) se relaciona con la normal-
(0,1), que es la que aparece calculada en las tablas, mediante -
la siguiente relación fundamental:

$$VC = E [VC] + \sigma (VC) \epsilon = 15.638 + 5.177 \epsilon \quad (4.36.)$$

donde

$\epsilon \rightarrow N(0,1)$ = variable aleatoria normal de media nula y desvia-
ción estandard igual.

El autor F.S. Hillier pretende justificar el comportamiento nor-
mal de VC en los casos que hemos estudiado en la sección ante-
rior. En el caso que los flujos de caja sean independientes (pri-
mer caso), y que el número de sumandos de (4.24) sea lo suficien-
temente elevado, la variable VC se comportará normalmente en vir-
tud del teorema central del límite. Cuando los flujos de caja es-
tán perfectamente correlacionados (segundo caso), si la variable
 Q_m toma el valor de $E [Q_m] + c \cdot \sigma (Q_m)$ en el período (c =constan-
te), entonces la variable Q_t tomará el valor $E [Q_t] + c \cdot \sigma (Q_t)$ -
el período t , para $t=0, 1, 2, \dots, m, \dots, n (Q_0 = A)$. De este mo-
do, cualquier circunstancia que afecte al valor esperado del flu-
jo de caja de un determinado período, afectará de igual forma a
los flujos de caja de todos los períodos, y por ésta razón es --
claro según dice Hillier que VC tiene una distribución normal, -

.../...

con una media dada por (4.25) y una varianza dada por (4.35). Por último, en el caso mixto, al subdividir los flujos en una parte independiente (Q'_t) y otra dependiente (Q''_t), que a su vez Hillier subdivide en una sucesión de variables $Q''_{t_1}, Q''_{t_2}, \dots, Q''_{t_m}$ mutuamente independientes y perfectamente correlacionadas con las de otros períodos, dicho autor considera que se sigue la distribución normal, con una media dada por (4.25) y una varianza dada por (4.38). Nosotros entendemos, sin embargo, que solo en el primer caso se puede aceptar en rigor la hipótesis de normalidad, al menos mientras tanto no se generalice (de forma satisfactoria) el teorema central del límite al caso de variables independientes.

En el ejemplo de la sección 2a, y dado que hemos admitido la hipótesis de independencia de los flujos de caja, haciendo uso de las tablas de la distribución normal podemos calcular las siguientes probabilidades, por ejemplo:

a) Probabilidad de que el valor capital sea positivo

$$\begin{aligned}
 P(\text{VC} \geq 0) &= P(15.638 + 5.174 \epsilon \geq 0) = P \left[\epsilon \geq \frac{-15.638}{5.177} \right] = \\
 &= P(\epsilon \geq -3,02) = P(\epsilon \leq 3,02) = 0,998 = 99,8\%
 \end{aligned}$$

.../...

b) Probabilidad de que el valor capital sea negativo.

$$P(\text{VC} < 0) = 1 - P(\text{VC} \geq 0) = 1 - 0,998 = 0,002 = 0,2\%$$

c) Probabilidad de que el valor capital se halle comprendido entre la media y una vez (en más o menos) la desviación típica, es decir, probabilidad de que el valor capital esté comprendido en el intervalo $(15.638 - 5.177; 15.638 + 5.177) = (10.461; 20.815)$.

$$\begin{aligned} P(10,46) < \text{VC} \leq 20,815) &= P(\text{VC} \leq 20.815) - P(\text{VC} \leq 10.461) = \\ &= P(\epsilon \leq 1) - P(\epsilon \leq -1) = P(\epsilon \leq 1) - P(\epsilon > 1) = P(\epsilon \leq 1) - \\ &= (1 - P(\epsilon \leq 1)) = 2P(\epsilon \leq 1) - 1 = 2 \cdot 0,841 - 1 = 0,682 = 68,2\% \end{aligned}$$

d) Probabilidad de que el valor capital se halle comprendido entre la media y dos veces (en más o menos) la desviación típica, es decir, probabilidad de que el valor capital esté comprendido en el intervalo $(15.638 - 2 \cdot 5.177; 15.638 + 2 \cdot 5.177) = (5.284; 25.992)$

$$\begin{aligned} P(5.284 < \text{VC} \leq 25.992) &= P(\text{VC} \leq 25.992) - P(\text{VC} \leq 5.284) = P(\epsilon \leq 2) - \\ &= P(\epsilon \leq -2) = P(\epsilon \leq 2) - P(\epsilon > 2) = P(\epsilon \leq 2) - (1 - P(\epsilon \leq 2)) = \\ &= 2P(\epsilon \leq 2) - 1 = 2 \cdot 0,977 - 1 = 0,954 = 95,4\% \end{aligned}$$

.../...

e) Probabilidad de que el valor capital se halle comprendido entre la media y tres veces (en más o menos) la desviación típica; es decir, probabilidad de que el valor capital esté -- comprendido en el intervalo $(15.638-3.5.177; 15.638+3.5.177)=$
 $= (107; 31.169)$.

$$\begin{aligned} P(107 < VC \leq 31.169) &= P(VC \leq 31.169) - P(VC \leq 107) = \\ &= P(\epsilon \leq 3) - P(\epsilon \leq -3) = P(\epsilon \leq 3) - P(\epsilon > 3) = \\ &= P(\epsilon \leq 3) - (1 - P(\epsilon \leq 3)) = 2 \cdot P(\epsilon \leq 3) - 1 = 2 \cdot 0.998 - 1 = 0.996 = 99.6\% \end{aligned}$$

En el supuesto de que no se conozca la ley de probabilidad de VC y que tampoco se pueda aventurar ninguna conjetura acerca de la misma, para el cálculo de estas probabilidades se puede utilizar la desigualdad de Chebycheff. Así, por ejemplo, podemos calcular las siguientes probabilidades:

a) Probabilidad de que el valor capital se halle comprendido entre la media y dos veces (en más o menos) la desviación típica; es decir, probabilidad de que el valor capital esté comprendido en el intervalo será:

$$P\left[|VC - E(VC)| \leq 2\sigma(VC)\right] \leq 1/4 = 0.25 = 25\%$$

.../...

- La probabilidad de que se halle dentro del intervalo será:

$$1 - P[|VC - E(VC)| \geq 2\sigma(VC)] \geq 1 - 1/4 = 0,75 = 75\%$$

b) Probabilidad de que el valor capital se halle comprendido entre la media y tres veces (en más o menos) la desviación típica; es decir, probabilidad de que el valor capital esté -- comprendido en el intervalo (107; 31.169).

- La probabilidad de que se halle fuera del intervalo será:

$$P[|VC - E(VC)| \geq 3\sigma(VC)] \leq 1/9 = 0,11 = 11\%$$

- La probabilidad de que se halle dentro del intervalo será:

$$1 - P[|VC - E(VC)| \geq 3\sigma(VC)] \geq 1 - 1/9 = 0,89 = 89\%$$

La desigualdad de Chebycheff nos proporciona pues, en este caso, un límite inferior de la probabilidad, que puede ser de gran utilidad para el analista de inversiones.

EL COMPORTAMIENTO PROBABILISTICO DE LA TASA DE RETORNO

La tasa de retorno sigue siempre la misma ley de probabilidad -

.../...

del valor capital. En el caso usual de inversiones simples, en todas las Q_t son positivas mientras que el desembolso inicial está afectado del signo menos, el valor capital es una función decreciente del tipo de actualización o descuento. Por lo tanto, si VC toma el valor M cuando k es igual a k_0 , ocurre que:

$$P(VC \leq M) = P(r \geq k_0) \quad 4.37.)$$

que nos expresa que r se distribuye de forma idéntica a VC, -- aunque sea distinto origen y el valor de los parámetros (media y varianza) correspondientes.

En el ejemplo de la sección 2 que venimos estudiando, podemos calcular las probabilidades $P(VC \leq 0)$, $P(VC \leq 5.000)$, $P(VC \leq 10.000)$, ..., con lo que obtenemos las probabilidades:

$P(r \geq k_1)$, $P(r \geq k_2)$, $P(r \geq k_3)$, ..., en donde:

- k_1 es el valor de k que en (4.24) hace VC igual a cero.
- k_2 es el valor de k que en (4.24) hace VC igual a 5.000
- k_3 es el valor de k que en (4.24) hace VC igual a 10.000

.....

.../...

Una vez que se conoce la distribución de probabilidades de r , - podemos calcular su media y su varianza, y también la probabilidad de que r alcance (o rebase) un cierto nivel o caiga dentro de un determinado intervalo.

4.4.4. Comportamiento aleatorio de los flujos de caja de una inversión. Algunas leyes de probabilidad que resultan útiles en la práctica.

INTRODUCCION

En la ecuación -y la consiguiente selección- de inversiones con riesgo, no podemos ocultar lo difícil que resulta en la práctica especificar las probabilidades de los posibles flujos de caja, así como la cuantía de éstos, en cada uno de los sucesivos periodos de tiempo. La rehabilitación de la probabilidad subjetiva o "a priori" a supuesto un considerable avance en este -- sentido pero el problema sigue siendo importante. El comportamiento de la variable aleatoria Q_{r_t} puede obedecer, además, a una ley de probabilidad distinta en cada uno de los sucesivos periodos de tiempo ($t=1, 2, \dots, n$), lo que nos obliga a hacer hipótesis distintas acerca del comportamiento aleatorio de cada una de las n variables Q_t^r , que luego tendrán que ser contrasta-

.../...

das devidamente. Todo ello necesita tiempo, laboriosos cálculos y un nivel de información que normalmente no se tiene. Por ello, no es de extrañar que en la práctica se admitan leyes de probabilidad acerca de los flujos de caja sin hacer pruebas de adherencia.

En este capítulo vamos a estudiar algunos modelos de probabilidad que resultan útiles para el analista de inversiones, sobre todo debido a la falta de información con que dicho analista tiene siempre que enfrentarse. Estos modelos son, a saber:

- La distribución beta
- La distribución triangular
- La distribución rectangular

LOS FLUJOS DE CAJA OPTIMISTAS, MAS PROBABLES Y PESIMISTAS. UNA APLICACION DE LA METODOLOGIA DEL PERT-TIEMPO CON INCERTIDUMBRE A LA VALORACION DE LAS INVERSIONES CON RIESGO

Una forma comoda de proceder en la práctica, consiste en especificar para cada flujo Q_t^r únicamente tres posibilidades, al igual que en el PERT-Tiempo con incertidumbre en lo relativo a la duración de las actividades. Las tres posibilidades son, a saber:

.../...

1. Flujo de caja pesimista (Q_t^P). El menor flujo de caja que puede general la inversión en el período t, en el peor de los ca sos; es decir, en el supuesto de que todo salga mal.
2. Flujo de caja más probable (Q_t^m). El flujo de caja más verosímil o más probable; es decir, el flujo de caja que normalmente puede generar la inversión en el período t.
3. Flujo de caja optimista (Q_t^O). El mayor flujo de caja que puede generar la inversión en el período t, en el mejor de los - casos; es decir, en el supuesto de que todo salga bien.

La justificación de esta forma de proceder en la práctica se haya en suponer que la variable aleatoria Q_t^r , que representa el -- flujo de caja en el período de tiempo t (un período de tiempo -- cualquiera) sigue la ley beta, cuya función de densidad de proba**u** bilidad es:

$$\begin{aligned}
 f(Q_t^r) &= 0, & Q_t^r &\leq Q_t^P \\
 f(Q_t^r) &= \frac{(Q_t^r - Q_t^P)^\gamma \cdot (Q_t^O - Q_t^r)^\delta}{(Q_t^O - Q_t^P)^{\gamma + \delta + 1} \cdot \beta(\gamma + 1, \delta + 1)} & (4.38.)
 \end{aligned}$$

$$Q_t^P < Q_t^r < Q_t^O$$

$$f(Q_t^r) = 0, Q_t^r > Q_t^O$$

.../...

El desenvolvimiento gráfico de la ley beta presenta una forma -- "acampanada", pero asimétrica. La asimetría puede ser hacia la derecha o hacia la izquierda. La curva representativa no es asintótica al eje de abcisa en ambos sentidos (como ocurre con la ley normal), sino que corta al eje de abcisas en Q_t^p y Q_t^o .

La esperanza matemática y la varianza, correspondientes a la distribución beta, calculadas a partir de los momentos de primer y segundo orden tal como nos enseña la Estadística Matemática, son:

$$E Q_t^r = \frac{Q_t^p + (\alpha + \gamma) Q_t^m + Q_t^o}{\alpha + \gamma + 2} \quad (4.39.)$$

$$\sigma^2 (Q_t^r) = \frac{(\alpha + 1) (\gamma + 1)}{(\alpha + \gamma + 2)^2 (\alpha + \gamma + 3)} \cdot (Q_t^o - Q_t^p)^2 \quad (4.40.)$$

En la práctica, sin embargo, y a propósito del método PERT, se suelen simplificar las fórmulas anteriores y se utilizan las siguientes:

$$E [Q_t^r] = \frac{Q_t^p + 4 Q_t^m + Q_t^o}{6} \quad (4.41.)$$

$$\sigma^2 (Q_t^r) = \frac{(Q_t^o - Q_t^p)^2}{36} \quad (4.42.)$$

.../...

En las simplificaciones que se han hecho para pasar de unas a -- otras fórmulas, se han supuesto las siguientes relaciones entre los parámetros:

$$\alpha + \gamma = 4 \quad (4.43.)$$

$$\frac{(\alpha + 1) \cdot (\gamma + 1)}{(\alpha + \gamma + 3)} = 1 \quad (4.44.)$$

Las simplificaciones anteriores han sido fuertemente criticadas, ya que no existen ningún fundamento teórico para suponer tales relaciones entre los parámetros. Más aún, como demuestra Gilles Thomas, tales simplificaciones llevan generalmente a subestimar la varianza, por lo que los resultados obtenidos aplicando tales fórmulas son siempre optimistas.

UNA APLICACION DE LA DISTRIBUCION BETA A UN PROBLEMA DE VALORACION DE INVERSIONES

En la tabla 12 puede observarse que el flujo de caja del año 1 es una magnitud cierta o constante. Su esperanza matemática, por lo tanto, coincidirá con dicho valor constante, y su varianza será nula.

.../...

TABLA 12

<i>Momento 0</i>			<i>Año 1</i>			<i>Año 2</i>		
<i>Desembolso inicial (A)</i>			<i>Flujo de caja del año 1 (Q₁)</i>			<i>Flujo de caja del año 2 (Q₂)</i>		
<i>Pesimista</i>	<i>Más probable</i>	<i>Optimista</i>	<i>Pesimista</i>	<i>Más probable</i>	<i>Optimista</i>	<i>Pesimista</i>	<i>Más probable</i>	<i>Optimista</i>
25.000	30.000	35.000	20.000	20.000	20.000	15.000	20.000	32.000

$$k = 0,07 = 7\%$$

Aplicando las fórmulas (4.4) y (4.42) correspondientes a la distribución beta simplificada, tenemos que:

$$E(A) = \frac{25.000+4 \times 30.000+35.000}{6} = 30.000$$

$$E(Q_1) = \frac{20.000+4 \times 20.000+20.000}{6} = 20.000$$

$$E(Q_2) = \frac{15.000+4 \times 20.000+32.000}{6} = 21.166$$

$$\sigma^2(A) = \frac{(35.000-25.000)^2}{36} = 2.777.777$$

$$\sigma^2(Q_1) = \frac{(20.000-20.000)^2}{36} = 0$$

$$\sigma^2(Q_2) = \frac{(32.000-15.000)^2}{36} = 8.027.777$$

Como el valor capital de la inversión viene dado por la siguiente expresión:

$$VC = -A + \frac{Q_1}{(1,07)} + \frac{Q_2}{(1,07)^2}$$

La esperanza matemática de VC será igual a:

$$E(VC) = -E(A) + \frac{E(Q_1)}{(1,07)} + \frac{E(Q_2)}{(1,07)^2} =$$

.../...

$$= -30.000 + \frac{20.000}{(1,07)} + \frac{21.166}{(1,07)^2} = 7.178$$

La varianza de VC, en el supuesto de que los flujos de caja sean independientes, será igual a:

$$\begin{aligned}\sigma^2(VC) &= \sigma^2(A) + \frac{1}{(1,07)^2} \sigma^2(Q_1) + \frac{1}{(1,07)^4} \sigma^2(Q_2) = \\ &= 2.777.777 + 0 + \frac{8.027.777}{(1,07)^4} = 8.902.129\end{aligned}$$

donde, la desviación estándar de VC será:

$$\sigma(VC) = \sqrt{8.902.129} = 2.983$$

Una vez que se conoce la esperanza matemática y la varianza de VC, para poder calcular la probabilidad de que VC alcance determinado valor, o que caiga dentro de un determinado intervalo, necesitamos conocer la ley de probabilidad que sigue la variable aleatoria VC. Pero ahora no podemos fundamentar la hipótesis de normalidad en el teorema central del límite, dado que el número de sumandos que definen a VC es muy reducido. No obstante, si a pesar de ello la variable VC se comporta normalmente, utilizando las tablas de distribución normal (0,1) podemos calcular las siguientes probabilidades con gran facilidad, por ejemplo:*

*La variable normal VC de parámetros (7.178, 2.983) se relaciona, como se sabe, con la variable normal t de parámetros (0,1) mediante la siguiente relación:

$$VC = 7.178 + 2.983$$

.../...

a) Probabilidad de que el valor capital sea positivo.

$$\begin{aligned} P [VC > 0] &= P [7.178 + 2.983\epsilon > 0] = P \left[\epsilon > \frac{7.178}{2.983} \right] = \\ &= P [\epsilon > -2,4] = P [\xi \leq 2,4] = 0,9918 = 99,18\% \end{aligned}$$

b) Probabilidad de que el valor capital sea superior a 8.000 unidades monetarias.

$$\begin{aligned} P [VC > 8.000] &= P [7.178 + 2.983 \epsilon > 8.000] = \\ &= P \left[\epsilon > \frac{822}{2.983} \right] = P [\epsilon > 0,27] = 1 - P [\epsilon \leq 0,27] = 1 - 0,59 = \\ &= 0,41 = 41\% \end{aligned}$$

UNA DISTRIBUCION ESTADISTICA ALTERNATIVA DE LA BETA: LA DISTRIBUCION TRIANGULAR

Las simplificaciones efectuadas en la distribución beta, a propósito de su utilización en el PERT-Tiempo con incertidumbre, han sido duramente criticadas porque suponen una deformación de dicha distribución. Ahora bien, de no hacer tales simplificaciones, en la práctica sería muy difícil trabajar con la distribución beta debido precisamente a las dificultades que entraña la estimación de los parámetros α y γ . Las nuevas fórmulas simplificadas

.../...

resultan muy cómodas desde el punto de vista operativo. Pero, de bemos formularnos la siguiente pregunta: ¿Por qué trabajar con una distribución teórica de cuatro parámetros (α , γ , Q_t^p y Q_t^o) si luego se prescinde de dos y solo se trabaja con los restantes? ¿No sería preferible utilizar otra distribución teórica en la -- que no fuera necesario hacer tales simplificaciones?. En efecto, entendemos que la distribución triangular, en la que solo interviene los parámetros Q_t^p , Q_t^o y Q_t^m , puede utilizarse muy bien en lugar de la distribución beta, y en la cual además no es necesario efectuar ninguna simplificación.

La variable aleatoria Q_t^r sigue la ley triangular cuando su función de densidad de probabilidad viene dada por:

$$f(Q_t^r) = 0, \quad Q_t^r \leq Q_t^p$$

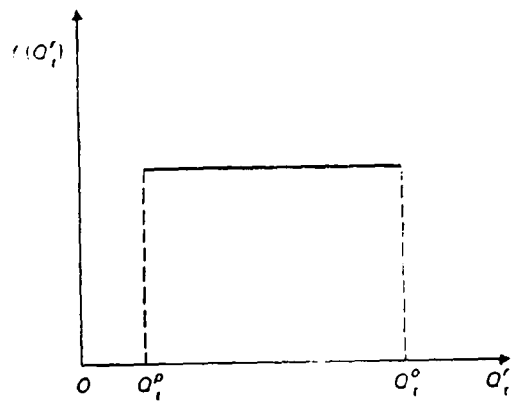
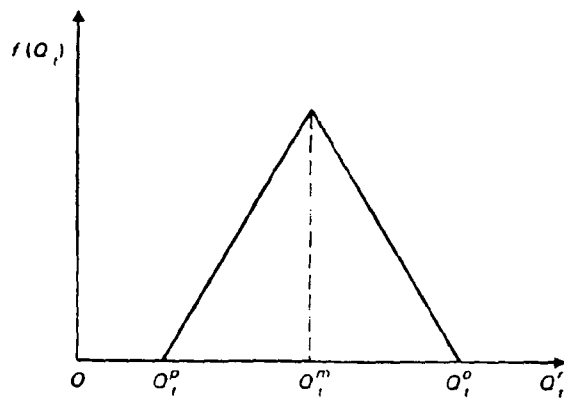
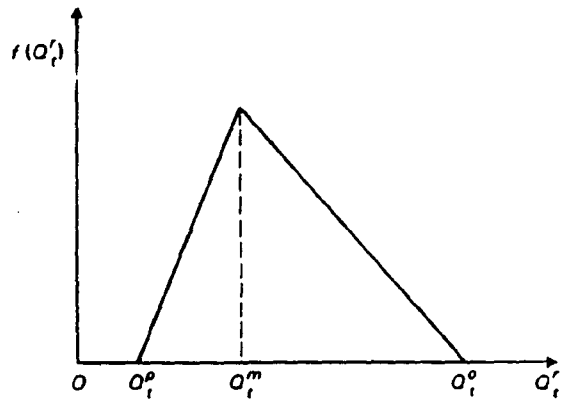
$$f(Q_t^r) = \frac{2}{(Q_t^m - Q_t^p) \cdot (Q_t^o - Q_t^p)} \cdot (Q_t^r - Q_t^p), \quad Q_t^p < Q_t^r < Q_t^m \quad (4.45.)$$

$$f(Q_t^r) = \frac{2}{(Q_t^m - Q_t^o) \cdot (Q_t^o - Q_t^p)} \cdot (Q_t^r - Q_t^o), \quad Q_t^m < Q_t^r < Q_t^o$$

$$f(Q_t^r) = 0, \quad Q_t^r \geq Q_t^o$$

La representación gráfica de esta función de densidad puede pre-

.../...



Flujos de caja en millones de pesetas

Estimación	Años	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	(Q _t)	(Q _t)	(Q _t)	(Q _t)	(Q _t)	(Q _t)	(Q _t)	(Q _t)	(Q _t)	(Q _t)	(Q _t)
Pesimista		1	2	2	1	2	2	1	0.5	0.5	0.5
Más probable		2	2.5	2.5	X	X	X	X	X	X	X
Optimista		3	3	3	3	4	4	3	2	1.5	1

$k = 0,07 \quad 7\%$

sentar cualquiera de las tres formas siguientes (asimétrica hacia la izquierda, simétrica y asimétrica hacia la derecha).

La esperanza matemática y la varianza en la distribución triangular son:

$$E Q_t^r = \frac{Q_t^p + Q_t^m + Q_t^o}{3} \quad (4.46.)$$

$$\sigma^2(Q_t^r) = \frac{(Q_t^o - Q_t^p)^2 - (Q_t^m - Q_t^p) \cdot (Q_t^o - Q_t^m)}{18} \quad (4.47.)$$

18

EL PROBLEMA DE LA INSUFICIENCIA DE INFORMACION PARA ESTIMAR EL FLUJO DE CAJA MAS PROBABLE: LA UTILIDAD DE LA DISTRIBUCION RECTANGULAR O UNIFORME

Tanto en la distribución beta simplificada como en la distribución triangular, se suponen dos niveles de información para estimar Q_t^p , Q_t^m y Q_t^o . Un nivel de información mínimo para estimar Q_t^p y Q_t^o , y un nivel de información superior para estimar Q_t^m . Este último valor del flujo de caja es un valor privilegiado, para cuya estimación se necesita una cantidad de información que no siempre se puede disponer de ella. En muchos casos, solo es posible estimar los valores extremos del flujo de caja correspondiente a un determinado período, pero no su valor más probable o ve-

.../...

rosimil. En estas situaciones, en vez de utilizar la distribución beta simplificada o la triangular, conviene utilizar la distribución rectangular o uniforme. Si no se dispone de información suficiente para poder especificar un valor más probable, lo más racional es suponer que todos los valores comprendidos entre los valores extremos (Q_t^p y Q_t^o) tienen igual probabilidad de presentarse.

La variable aleatoria Q_t^r se distribuye rectangularmente en el intervalo (Q_t^p , Q_t^o) cuando su función de densidad viene dada por la expresión:

$$f(Q_t^r) = 0, \quad Q_t^r \leq Q_t^p \quad (4.48.)$$

$$f(Q_t^r) = \frac{1}{Q_t^o - Q_t^p} \cdot Q_t^p < Q_t^r < Q_t^o$$

$$f(Q_t^r) = 0, \quad Q_t^r \geq Q_t^o$$

La esperanza matemática y la varianza en la distribución rectangular vienen dadas por:

$$E Q_t^r = \frac{Q_t^p + Q_t^o}{2} \quad (4.49.)$$

$$\sigma^2(Q_t^r) = \frac{(Q_t^o - Q_t^p)^2}{12} \quad (4.50.)$$

.../...

UN EJEMPLO EN EL QUE SE SUPONE QUE UNOS FLUJOS DE CAJA DE UNA --
CIERTA INVERSION SIGUEN LA DISTRIBUCION TRIANGULAR Y OTROS SI—
GUEN LA DISTRIBUCION RECTANGULAR O UNIFORME

Una determinada inversión genera cobros y pagos durante 10 años, y origina un desembolso inicial de 10 millones de pesetas. Los flujos de caja de los tres primeros años siguen la distribución triangular, mientras que los flujos de caja de los siete últimos años siguen la distribución rectangular. Los flujos de caja pesimistas, más probables (para los años en que se pueden especificar) y optimistas, se recogen en la tabla 14.

En el supuesto de que los flujos de caja sean independientes, se desea conocer la esperanza matemática y la varianza del valor capital de la inversión, así como la probabilidad de que el valor capital sea superior a cinco millones de pesetas.

El valor capital de esta inversión vendrá dado por:

$$VC = -A + \frac{Q_1}{(1,07)} + \frac{Q_2}{(1,07)^2} + \dots + \frac{Q_{10}}{(1,07)^{10}} \quad (4.51.)$$

Utilizando ahora las fórmulas (4.46) y (4.47) para calcular la media y la varianza de los flujos de caja correspondientes a los -

.../...

tres primeros años, y las fórmulas (4.49) y (4.50) para los siete flujos de caja restantes, obtenemos los resultados que se recogen en la tabla 15.

La esperanza matemática de VC será igual a:

$$E[VC] = -E[A] + \frac{E[Q_1]}{(1,07)} + \frac{E[Q_2]}{(1,07)^2} + \dots + \frac{E[Q_{10}]}{(1,07)^{10}} = -10 + \frac{2}{(1,07)} + \frac{2,5}{(1,07)^2} + \dots + \frac{0,75}{(1,07)^{10}} = 4,6$$

la varianza de VC será:

$$\sigma^2(VC) = \sigma^2(A) + \frac{\sigma^2(Q_1)}{(1,07)^2} + \frac{\sigma^2(Q_2)}{(1,07)^4} + \dots + \frac{\sigma^2(Q_{10})}{(1,07)^{2 \times 10}} = 0 + \frac{0,16}{(1,07)^2} + \frac{0,04}{(1,07)^4} + \dots + \frac{0,02}{(1,07)^{2 \times 10}} = 0,92$$

Como los flujos de caja los suponemos independientes, en virtud del teorema central límite podemos sustentar la hipótesis de normalidad para VC. La probabilidad de el valor capital sea, por ejemplo, superior a cinco millones de pesetas será:

$$P[VC > 5] = P[4,6 + 0,9\epsilon > 5] = P[\epsilon > 0,44] = 1 - P[\epsilon \leq 0,44] = 1 - 0,67 = 0,33 = 33\%$$

.../...

Otros métodos para la medición y control del riesgo en la toma de decisiones de inversión son los contenidos en la técnica de simulación de modelos, como puede ser el método de Monte Carlo, principalmente en su aplicación a la evaluación del riesgo de las inversiones.

4.5. El coste de oportunidad.-

Basándose en la noción de coste real de uso del capital, c , es siendo a través del coste de uso que tanto la tasa de interés - como el nivel de beneficios se integran en nuestra demanda de - inversión.

Definiendo C como el precio nominal de la renta imputada por - los servicios de capital usados en cada período, no es este el precio cuantificable de un insumo como el salario o la remunera- ción por hora-hombre, dado que típicamente los bienes de capi- tal se compran en un período y se usan después por un espacio - de tiempo, pero no se arriendan como los servicios laborales. - Esta es la diferencia capital entre el mercado de bienes de ca- pital y el de otros insumos, inclusive el trabajo, que torna -- muy compleja la teoría del capital y que dificulta también con- siderablemente la medición de los insumos de capital. En una -- economía sin esclavos, las empresas no compran el trabajo, esto es, a los trabajadores mismos; las empresas rentan los servi- cios laborales por un salario, precio establecido como un pago por unidad de tiempo de servicios prestados. Por otra parte, -- puesto que los bienes de capital son comprados generalmente en un punto del tiempo y después utilizados por sus propietarios -

.../...

durante un largo período, no hay una medida del precio de una hora-máquina de servicio de una clase dada. Si todos los bienes de capital fuesen propiedad de personas (o empresas) que rentaran o arrendaran los servicios de estos bienes a otras empresas sin que empresa alguna usara bienes de capital propios, contaríamos con una medida satisfactoria del valor de los servicios del capital -el coste de uso del capital- en el precio de la renta. Pero no es este el caso, de modo que tenemos que idear una medida del coste de uso C valiendonos en el proceso de un vasto insumo de teoría económica.

Supongamos la compra de una pala retroescavadora en un precio P_1 (I para inversión). Hay tres componentes que constituyen el coste de uso del bien, en cada período de la vida de éste, para su propietario:

- 1.- El primero es el coste de interés del bien de capital, que es el coste de oportunidad en que se incurre al comprometer los fondos. Este es la tasa de interés multiplicada por P_1 . Si la empresa compra máquina, digamos, en 100.000 u.m y si la tasa de interés a la que podría haber prestado esa suma es del 5% al año, la empresa entonces está renunciando a un coste de oportunidad de 5.000 u.m al año, que podría haber

.../...

ganado en interés.

2.- Después viene la cantidad en que se deprecia el bien en cada período, δP_1 . Si la tasa económica de depreciación δ es del 10%, la empresa pierde entonces el 10% del precio de la máquina al año en depreciación: 10.000 u.m en el primer año por una máquina de 100.000 u.m.

3.- Cualquier cambio en el precio de mercado del bien, una vez comprado, forma parte del coste de uso. Si el precio de mercado de una nueva máquina del mismo modelo está aumentando a través del tiempo ello elevará el precio de las máquinas usadas por arriba del precio dictado por el precio original de compra menos la depreciación. Este precio se incrementa como una ganancia de capital: un coste negativo igual a $-dP_1/dt_1$, la tasa de cambio en el tiempo de P_1 .

Sumando estos componentes, el coste nominal imputado de uso del bien de capital para su propietario está dado por:

$$C = rP_1 + \delta P_1 - \frac{dP_1}{dt},$$

.../...

$$(4.51) \quad C = P_1 (r + \theta - P_1),$$

en donde P_1 es la ganancia proporcional de capital:

$$P_1 = \frac{\frac{dP_1}{dt}}{P_1}$$

la ecuación (4.52) puede volver a escribirse como:

$$C = P_1 (r - P_1 + \theta),$$

para poner de relieve la relación entre el coste de uso y la tasa "real" de interés $r-p$. Si a prestamistas y prestatarios les importa el valor real o poder adquisitivo de activos y pasivos descontarán las tasas nominales de interés r por la tasaesperada de inflación P . Si la tasa anual de interés sobre un préstamo es 7% y la tasa de inflación es 2%, la tasa real en términos de poder de compra es 5%. Si ambas tasas, r y P , suben en la -- misma cantidad, la tasa real no cambiará y las decisiones de -- prestar, pedir prestado e invertir no deberán modificarse. Este será el caso si el coste de uso se calcula como lo mostramos en la ecuación (4.52) ha sido tratado de diversas maneras en los -

.../...

trabajos empíricos. Podría darse por sentado que los inversionistas o no saben o no les interesa, cuando consideran la compra de un bien de capital, cuáles son las ganancias anticipadas de capital, en cuyo caso el término P_1 podría suprimirse de la ecuación (4.52) dándonos:

$$(4.53) \quad C = P_1 (r + \delta)$$

Este es el método empleado por Jorgenson y colaboradores en varios estudios recientes (1963-1967) sobre el comportamiento de la inversión en la posguerra. Puesto que estos trabajos utilizaron información estadística que llegaba hasta mediados de los años sesenta, antes de que empezara la inflación, en 1966 o algo así, esta no era probablemente una mala aproximación. Si -- hay poca variación del término P_1 , en los datos, suprimirlo en un análisis de regresión no perjudicará mucho los resultados.

Por otra parte, Jorgenson, Bischoff y otros, en un trabajo reciente relacionado con el modelo de grupo de la Dirección de Reserva Federal-MIT-, Pensilvania (FMP), aproximaron P_1 de la ecuación (4.52) mediante una distribución de retrasos con base en los cambios anteriores de los precios. Es así como la gente forma, en teoría, sus expectativas sobre los cambios futuros de

.../...

los precios: esencialmente extrapolando los cambios pasados. - Además, la formulación del FMP permite que el término P_1 se integre a la ecuación (4.52) solo en caso de que P haya rebasado en los trimestres recientes, cierto valor de entrada, en base al supuesto de que la inflación debe llegar a cierta tasa mínima antes de que la gente "caiga en cuenta" de ella.

Estos reajustes brinda una explicación del comportamiento de - la inversión desde 1966 superior a la que proporciona el em—pleo de la expresión truncada del coste de uso en la ecua—ción (4.53). Por lo tanto, parece probable que los términos en P tendrán que incluirse en los cálculos del coste de uso de -- los estudios venideros para poder explicar la demanda de inversión, por lo menos durante períodos inflacionarios.

La siguiente pregunta de importancia que responder acerca del coste de uso es: ¿qué determina el valor de r , el coste imputado en intereses o coste de oportunidad, en la ecuación (4.53)? Como lo mencionamos brevemente antes, una empresa puede conseguir dinero para la compra de capital nuevo en tres formas: - ocupando recursos internos, vendiendo obligaciones (deuda) y - emitiendo acciones (títulos). En un mundo de competencia per--fecta y donde no hubiera distorsiones impositivas el coste im-

.../...

putado adscrito a cada uno de estos medios de obtener dinero - sería el mismo, dejando un margen para diferencias en riesgo.

De hecho, sin embargo, las empresas imputarán probablemente un coste más bajo a los recursos conseguidos dentro de la empresa por la retención de ganancias más las provisiones por depreciación que a las otras dos fuentes de fonso, ya que atribuyen -- costes adicionales a los recursos adquiridos fuera de la empresa a causa del pasivo fijo asociado a la venta de bonos o en -- razón de la dilución de control resultante de la emisión de acciones. Por lo tanto, la tasa de interés o el coste de oportunidad utilizados para calcular el coste de uso del capital puede ser un promedio ponderado de las tasas de interés que se -- apliquen a estas tres fuentes diferentes de recursos, en donde las ponderaciones son las fracciones de los fondos totales obtenidas de estas fuentes alternativas:

$$(4.54) \quad r = r_i \left(\frac{\text{recursos internos}}{\text{inversión total}} \right) + r_D \left(\frac{\text{emisión de bonos}}{\text{inversión total}} \right) \\ + r_E \left(\frac{\text{emisión de acciones}}{\text{inversión total}} \right)$$

en donde:

.../...

r_i = el coste de oportunidad de prestar las ganancias retenidas de la empresa.

r_D = un tipo de interés fijado a los bonos como el de los bonos corporativos de Moody Aaa, y

r_E = una proporción promedio ganancias-precio de los títulos -- corporativos.

Se asume que tanto r_D como r_E son mayores que r_i .

Desmembrando r en estos tres componentes hemos insertado los - beneficios aumentan, la cantidad de recursos internos disponi- bles para inversión se acrecienta. Si la tasa de interés r_i -- asignada a los recursos internos es más baja que las otras el incremento en los beneficios reducirá el promedio ponderado de todas las tasas de interés, según se muestra en la ecuación - (4.54) y esto, a su vez, bajará el coste de uso del capital, - como se presenta en la ecuación (4.54). Un menor coste de uso implica que se llevará a cabo mayor inversión, de suerte que - hemos establecido una conexión entre los beneficios y el nivel de la inversión a través del coste de uso.

.../...

Es muy difícil apreciar el efecto de los beneficios sobre la inversión en los datos estadísticos sobre inversiones, porque los beneficios se hallan altamente correlacionados con los cambios en el producto. Aun así, los puntos de vista de los hombres de negocios señalan que los beneficios son relevantes en sus decisiones de inversión y, consiguientemente, se antoja razonable que los beneficios deben incluirse como un determinante de la demanda de inversión.

RETRASOS EN LA DEMANDA DE INVERSION

Nos basaremos ahora en la siguiente fórmula de demanda de inversión para seguidamente resumir la teoría de la demanda de la inversión,

$$(4.55) \quad i_g = i_n + i_r = \Delta K^E (y, C, P) + \partial K,$$

prescindiendo todavía de los retrasos entre los cambios de K^E y los movimientos de i_n , uno de los temas a tratar en esta sección. Tenemos en seguida la definición del coste de uso del capital, C , de la ecuación (4.53).

.../...

$$C = P_1 (r - P_1 + \partial),$$

la cual incorpora la tasa de interés a la descripción. Por último, tenemos la expresión de la tasa de interés como un promedio ponderado de las tasas de las tres fuentes principales de recursos:

$$(4.56) \quad r = W_I r_I + W_D r_D + W_E r_E$$

en donde las W son las porciones de fondos suministrados internamente (I), por emisión de bonos (D) y por emisión de acciones (E), y $\sum W = 1$. El nivel de beneficios se inserta aquí en el cuadro, dado que r_I es supuestamente menor que r_E y r_D . Hemos estado tratando hasta ahora de una situación estática, sin incluir conceptos de retrasos temporales para los cambios en el nivel del stock de capital. Adoptaremos ahora una visión -- del proceso inversionista, y estudiaremos algunos resultados -- empíricos.

Podemos comenzar por considerar la demanda de inversión como -- una función de dos cosas: el coste real de uso de los bienes -- de capital, C , y la demanda por la producción, y , de bienes de capital. Es decir, si el coste del capital sube en relación al

.../...

del trabajo, esperaríamos que una empresa usara más trabajo y menos capital en su proceso productivo para un nivel dado de producción, y así mismo esperaríamos que la producción bajara. Por otro lado, si, para un coste dado del capital, la demanda del producto aumenta, sería de esperarse que la empresa elevara el empleo tanto de capital como de trabajo para generar más producto.

Supongamos que una empresa decide invertir en una nueva explotación.

Analizará los diversos proyectos factibles de la nueva explotación y escogerá aquel que tenga una razón, capital-trabajo K/N que le permita producir cualquier cantidad dada de producto a un coste mínimo. Asumamos aún más que esta nueva explotación-- es una inversión en " piedra caliza-arcilla". Esto es, la empresa puede elegir entre muchos prospectos con diferentes relaciones K/N , de tal manera que la relación K/N sea variable y K y N sean sustituibles ex ante; el Stock de capital es la "caliza" ex ante. Pero una vez que la explotación está levantada-- el capital y el trabajo deben emplearse en las proporciones fijas para producir un nivel dado de producto de acuerdo con lo que se especifica en el proyecto escogido; el Stock de capital

.../...

se convierte en "arcilla" ex post. Por tanto, ex ante, la relación capital-producto y capita-trabajo, son variables; ex post están fijas.

Deseamos ahora ver que efectos tendrán los cambios de la demanda y en el coste de capital sobre el patron existente de inversión de la empresa, dada la función de producción de "caliza-arcilla". Veamos primero los cambios en la demanda. Puesto que el producto de la planta existente es fijo ex post, si la empresa espera que el nuevo nivel de la demanda sea permanente y quiera hacerle frente tendrá que ampliar su planta de inmediato a falta de exceso de capacidad instalada. Esta reacción se muestra en la figura (a).

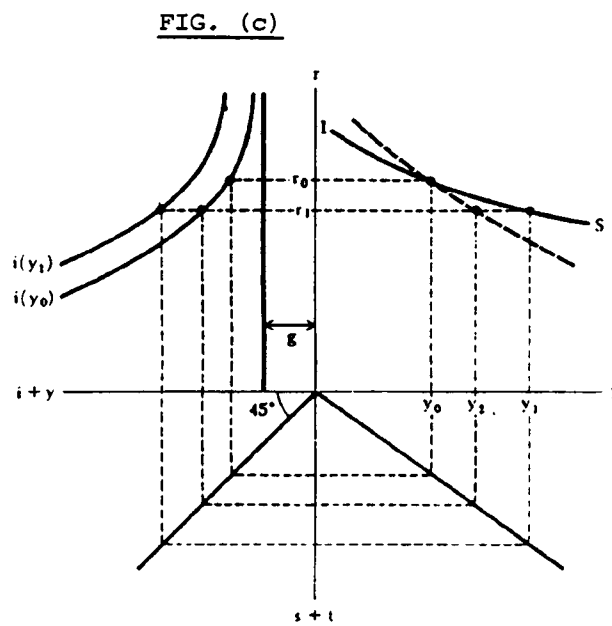
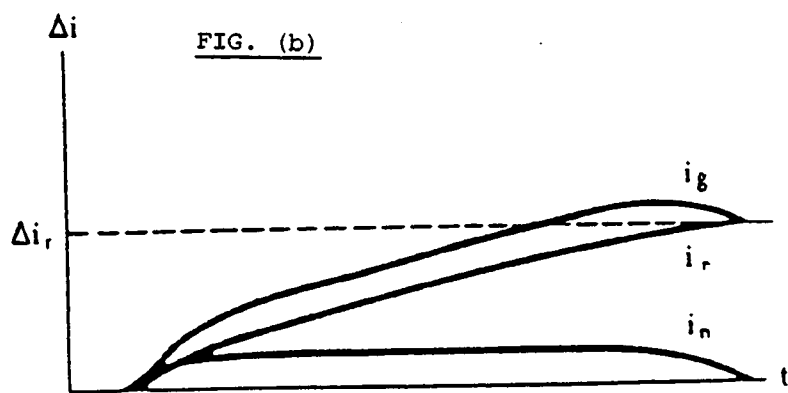
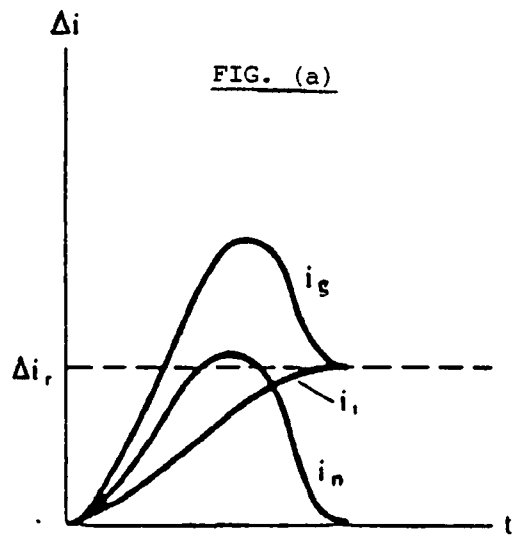
El incremento del producto sube eventualmente el Stock de equilibrio del capital en ΔK^E , acrecentando gradualmente la inversión de reposición a $\Delta i_r = \delta (\Delta K^E)$. El incremento a la inversión neta a lo largo de la curva i_g , el cambio de la inversión bruta de la figura (a). En el plazo de un corto periodo, el Stock total de capital se aumento en una cantidad igual al área bajo la curva y_n . Debido a aquel el nivel de equilibrio del Stock de capital es más elevado ahora, hay un incremento en el nivel de la inversión de reposición en una cantidad Δi_r . De -

.../...

bido a que el nivel de equilibrio del stock de capital es más elevado ahora, hay un incremento en el nivel de la inversión de reposición en una cantidad Δi_r , de modo que la trayectoria de la inversión total se presenta con la curva i_g . El punto esencial aquí es que todos estos aumentos en i_n , i_r e i_g tienen lugar con un pequeño rezago atribuible a la fijeza ex post de la capacidad productiva instalada y a la necesidad de ampliar la explotación para hacer frente a la demanda.

Supongamos ahora que la empresa cuenta con la misma explotación original de "arcilla", pero que observa una reducción en el coste relativo del capital en lugar de un cambio en la demanda de su producto. El resultado principal de este cambio será que la empresa querrá elevar la cantidad de capital que usa en relación con el trabajo, esto es, querrá aumentar la relación K/N . La empresa reemplazará gradualmente su explotación vieja por una nueva clase de explotación (una planta que sea más intensiva en capital, con una razón capital-trabajo más alta). Resulta que con un cambio en el coste de uso del capital se efectúa un proceso mucho más largo de cambio que con un aumento en la demanda, es decir, hay un retraso mayor hasta que se da por concluido el cambio, según se muestra en la figura (b) Charles W. Bischoff descubrió en un ensayo que con un cambio en el tipo de

.../...



interés de un bono corporativo el nivel de inversión no varía - sino hasta que han transcurrido dos trimestres y que el nivel - de la inversión está todavía subiendo después de doce trimes--- tres. Es ésta una lógica razonable del retraso, puesto que el - periodo de vida promedio del stock de capital de los Estados -- Unidos es de aproximadamente de 6 a 7 años, de modo que el repo- ner el stock de capital cuando éste se acaba, debe llevarse ese largo periodo de tiempo precisamente.

En cuanto a lo que toca a la reacción de largo plazo de la de-- manda de inversión a cambios en sus determinantes primordiales, r e i, en un estado estacionario, Bischoff descubrió que la elas- ticidad de largo plazo de la demanda de inversión con respecto a cambios en el producto es aproximadamente la unidad, con un - pequeño rezago. Esto implica una relación capital-producto bas- tante constante en el largo plazo, dado que el stock de capital crecería a la misma tasa que el producto con un retraso. Bis- choff también encontró que la elasticidad de largo plazo de la demanda de inversión con relación a las variaciones de la tasa de interés es de aproximadamente $-0,5$. En otras palabras, si la tasa de interés sobre los bonos corporativos aumenta del 7% al 7,7%, una variación del 10%, podríamos esperar una caída del 5% en la inversión en el largo plazo de 100.000 millones de dóla--

.../...

res a 95.000 millones, por ejemplo, que sobreviniese paulatinamente durante un período de dos a tres años. Esto se funda obviamente en el supuesto de que los inversionistas conceptúan -- los cambios en el coste de capital como permanentes, en la misma forma exactamente en que asume que los aumentos presenten en la demanda continuarán en el futuro.

LA INVERSION EN EL MODELO ESTATICO

La función de la demanda de inversión, ecuación (4.55), convierte la inversión neta en una función de los cambios en el nivel del producto y en la tasa de interés. Anteriormente analizamos las implicaciones de este mecanismo acelerador para una política estabilizadora. El nivel de inversión de reposición i_r depende del nivel preexistente del stock de capital. Si la economía está en equilibrio con r e y dados, el stock existente de capital puede ser aproximadamente igual al stock de equilibrio del capital K^E , el cual, a su vez, depende del nivel de y y r . Por lo tanto, en el modelo estático que determina los valores de -- equilibrio de las variables podemos ahora escribir la función de inversión como:

$$(4.57) \quad i = i(r, y); \quad \frac{\partial i}{\partial r} < 0, \quad \frac{\partial i}{\partial y} > 0,$$

.../...

sustituyendo la función $i=i(r)$ de la parte segunda. Estamos tratando aquí de un modelo estático en el cual la inversión de reposición es una función del nivel del producto y de la tasa de interés. Una elevación de la tasa de interés reduce el stock de equilibrio del capital K^E , contrayendo la inversión de reposición de manera que $(\partial i / \partial r) < 0$. Un aumento del producto eleva K^E , de suerte que $(\partial i / \partial y) > 0$. No estamos refiriéndonos al acelerador expuesto antes, ya que éste depende de las tasas de cambio del ingreso y nosotros estamos tratando únicamente de un cambio de un nivel del ingreso a otro.

Haciendo depender i de y y de r modificamos la pendiente de la curva IS en forma considerable, lo cual se muestra en la gráfica (c) que exhibe el diagrama de cuatro cuadrantes de la IS con $i=i(r,y)$. Para cada valor de y hay una diferente curva de demanda de inversión en el cuadrante noroeste de la gráfica (c). Cuando el ingreso sube de y_0 a y_1 la curva de demanda de inversión se desplaza hacia arriba de $i(y_0)$ a $i(y_1)$. Esto aplana la curva IS que proporciona los puntos r,y que conservan el equilibrio del mercado de productos. Con $i=i(r,y)$, una baja en la tasa de interés proporcionará un aumento en el producto de equilibrio del mercado de productos mayor que con $i=i(r)$, porque el incremento inicial y eleva i , lo cual aumenta todavía más y .

.../...

Por consiguiente, con $i=i(r,y)$, partiendo de r_0, y_0 en la gráfica (c) una reducción de la tasa de interés a r_1 mueve y de -- equilibrio del mercado de productos a y_1 , a lo largo de la curva continúa IS, con la función i subiendo a $i(y_1)$. Con $i=i(r)$ -- el nivel del producto de equilibrio habría aumentado solamente a y_2 a lo largo de la curva de guiones IS.

Una disminución de la tasa de interés lleva entonces a un aumento de la inversión y éste, a su vez, conduce a ingresos más altos, los cuales llevan a una inversión todavía mayor a causa -- del desplazamiento de la función $i(y)$. Podríamos incluso tener una curva IS con pendiente positiva si $i(r,y)$ reaccionase suficientemente al aumento en y . En la gráfica (c), si el aumento -- de y_0 a y_1 provocó que la curva $i(y)$ se desplazara mucho más alto en el cuadrante noroeste, puede verse que, reconstruyendo -- los efectos podría lograrse que la curva IS se inclinara ascendentemente.

LA ESTABILIDAD Y LA PENDIENTE DE LA CURVA IS

Podemos derivar una expresión de la pendiente de la curva IS para examinar los efectos de introducir la dependencia de i con -- respecto a y en la exposición. Siendo $i=i(r)$ y con la condición

.../...

de equilibrio del mercado de productos,

$$(4.56) \quad y = c [y - t(y)] + i(r) + g,$$

se obtuvo la pendiente de la curva IS al diferenciar (5.58) y -
llegar a

$$dy = c' (1 - t') dy + i' dr$$

(4.59)

$$\left. \frac{dr}{dy} \right|_{IS} = \frac{1 - c' (1 - t')}{i'}$$

como la pendiente de la IS. Puesto que $c' (1 - t')$, la propensión marginal a consumir del PNB, es menor que uno -quizá 0.6-, el - numerador de (4.59) es positivo,, y con $i' < 0$ la pendiente de la curva IS de la parte segunda era necesariamente negativa.

Con $i = i(r, y)$, la condición de equilibrio del mercado de productos se convierte en:

$$y = c [y - t (y)] + i(r, y) + g$$

La diferencia de esta expresión nos da:

.../...

$$dy = c' (1-t') dy + \frac{\partial i}{\partial r} dr + \frac{\partial i}{\partial y} dy,$$

de manera que la pendiente de la curva IS está dada ahora por:

$$(4.61) \quad \left. \frac{dr}{dy} \right|_{IS} = \frac{1 - c' (1-t') - \frac{\partial i}{\partial y}}{\frac{\partial i}{\partial r}}$$

Puesto que $\partial i / \partial y$ es positiva, el numerador de (4.61) es menor que el de (29) y la pendiente de la curva IS es más plana. Si la suma $c' (1-t') + \partial i / \partial y$ es mayor que uno, el numerador de -- (4.61) sería negativo y la curva IS tendría inclinación positiva.

Ya que $c' (1-t')$ es la MPC del PNB, y que $\partial i / \partial y$ es la propensión marginal a invertir del PNB, su adición puede denominarse la propensión marginal a gastar del PNB. Ella proporciona el aumento en el gasto o en la demanda inducido por un incremento dado del PNB. Si la propensión marginal a gastar es mayor que -- uno, un aumento de 1.000 millones de dólares en el PNB lleva a un aumento en los gastos planeados de más de 1.000 millones de dólares, la curva IS tiene pendiente positiva y la economía -- puede llegar a ser inestable. Esto puede apreciarse analizando la cadena del multiplicador adaptada a la de la forma si---

.../...

guiente: en el modelo de la parte segunda con $i=i(r)$, y r mantenida constante por un movimiento adecuado de política monetaria en la LM, un aumento exógeno de g dió lugar a un incremento de y de:

$$dy = dg \left\{ 1 + c' (1-t') + [c' (1-t')]^2 + \dots \right\}$$

Ya que $c' (1-t')$ es menor que uno, esta secuencia converge; -- $[c' (1-t')]^n$ se aproxima a cero cuando n se agranda. Pero ahora la secuencia es:

$$dy = dg \left\{ 1 + \left[c' (1-t') + \frac{\partial i}{\partial y} \right] + \left[c' (1-t') + \frac{\partial i}{\partial y} \right]^2 + \dots \right\}.$$

Si la propensión marginal a gastar es menor que la unidad el -- multiplicador todavía converge a $1 / [1 - c' (1-t') - (\partial i / \partial y)]$.- Pero si es mayor que uno de los términos dentro de los paréntesis se hacen cada vez más grandes a medida que el exponente n aumenta. Un incremento dado dg conduce a un mayor aumento en el gasto, el cual lleva a un incremento mayor de ingreso, de modo que la economía es estable sólo si los aumentos en las tasas de interés que se originan por mantener constante M durante este proceso ahogan la inversión lo suficiente como para detener esta espiral ascendente.

.../...

Afortunadamente, parece que la economía es estable según las -- evidencias empíricas; la curva IS tiene de hecho pendiente nega tiva. Los cálculos empíricos realizados actualmente indi_____ can que la propensión marginal a consumir de largo plazo es --- igual a c/y , lo cual constituye cerca del 60-65% del PNB. Por - tanto, $c' (1-t')$ podría estar aproximadamente en 0.65. Si la -- elasticidad de la demanda de inversión con respecto al producto es unitaria, como se sugirió anteriormente en este capítulo, en tonces:

$$1 = \frac{\partial i}{\partial y} \cdot \frac{y}{i},$$

de modo que:

$$\frac{i}{y} = \frac{\partial i}{\partial y},$$

y podemos medir $\partial i / \partial y$ mediante la relación inversión-PNB de -- aproximadamente 0.15. Por lo tanto, la propensión marginal a -- gastar podría estar en cerca de 0.80 (= 0.65 + 0.15) y la curva IS está negativamente inclinada.

5.- CONCLUSIONES

Las técnicas de exploración geológica sufren un constante avance de tal forma que las innovaciones tecnológicas son asimiladas e incorporadas a los instrumentos existentes ya en el mercado, con lo que se logra una mejora en sus rendimientos sobre la misma base teórica. Otra tendencia está encaminada al desarrollo de técnicas nuevas, medidas de reflexión de ondas electromagnéticas solares, encontrándose en período de experimentación y perfeccionamiento.

Los mayores avances se han realizado en la adaptación de los instrumentos de medida para ser acoplados a satélites artificiales, fotografía infrarroja S.L.A.R., helicópteros, radiometría para la búsqueda de Uranio, mediante rayos γ , siendo estos sobre todo en mayor sensibilidad y fiabilidad, así como -- nuevas técnicas interpretativas debido a las características de la información recogida, su cantidad y calidad, entre ellos el análisis digital de ésta.

Deben seleccionarse de estas técnicas, aquellas que tengan una utilidad y aplicabilidad "a priori" para las necesidades y/o -- supuestos prácticos planteados en el territorio nacional, como la detección de SO_2 en la atmósfera en la búsqueda de yacimientos de sulfuros, las técnicas de imágenes térmicas en la explo

.../...

ración de recursos geotérmicos o las más arriba mencionadas. - Así como su puesta en práctica por el IGME.

Una vez determinadas éstas, la realización de una campaña experimental de adiestramiento de personal especializado capaz de desarrollar estas actividades pudiéndose dar por terminado una vez analizados los resultados y su aplicación rutinaria.

En la valoración de yacimientos se considera no solamente el aspecto puramente geológico sino la importancia de cuantificar el riesgo que toda inversión conlleva, acentuada por las particularidades en la industria minera. Debe aquí el IGME como Ente público correr con los mayores riesgos. El presente proyecto ofrece una herramienta adecuada para este fin.

No es posible, sin embargo, el cálculo de todos estos parámetros, que influyen en la inversión minera, sin los instrumentos de cálculo adecuados por lo que sería recomendable un estudio de modelos matemáticos susceptibles de ser introducidos en un cerebro electrónico.